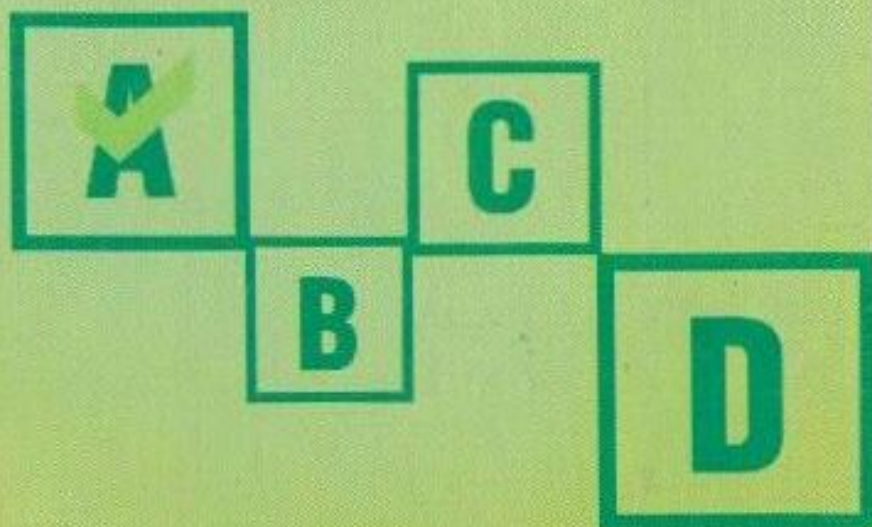


LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
LÊ HỮU TRÍ - LÊ BÍCH NGỌC

40 ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM

TOÁN 10

*(Soạn theo hướng cải tiến ra đề
kiểm tra chất lượng của Bộ GD & ĐT)*



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HỒNG ĐỨC (Chủ biên)
LÊ HỮU TRÍ – LÊ BÍCH NGỌC

40 ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM

TOÁN 10

(Soạn theo hướng cải tiến ra đề
kiểm tra chất lượng của Bộ GD & ĐT)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Trong thời gian không xa, theo chủ trương của BGD&ĐT các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lý luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lý do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cựu Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.
2. Ở đây, thông thường các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:
 - Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm.
 - Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm còn lại.

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa $\frac{a}{2}$ điểm với xác suất 25%.
2. Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được $\frac{a}{2}$ điểm. Thí dụ với câu hỏi:

(1 điểm): Giải phương trình $\sqrt{x} = 2 - x$.

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| ☐ $x = 0$. | ☐ $x = 4$. |
| ☐ $x = 5$. | ☐ $x = 1$. |

Cách 1: Thực hiện phép thử bằng tay, các em sẽ cần thử cho các nghiệm $x = 0, x = 5, x = 4, x = 1$, cụ thể:

- Với $x = 0$, ta được:
 $\sqrt{0} = 2 - 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 0$ không là nghiệm.
- Với $x = 5$, ta được:
 $\sqrt{5} = 2 - 5 = -3$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 5$ không là nghiệm.

- Với $x = 4$, ta được:
 $\sqrt{4} = 2 - 4 = -2$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 4$ không là nghiệm.
- Với $x = 1$, ta được:
 $\sqrt{1} = 2 - 1 = 1$, đúng $\Rightarrow x = 1$ là nghiệm.

Vậy, các em sẽ lựa chọn câu trả lời trắc nghiệm là $x = 1$.

Cách 2: Sử dụng máy tính fx – 570MS bằng cách lần lượt thực hiện:

Nhập phương trình $\sqrt{x} - 2 + x = 0$ vào máy tính bằng cách ấn:

ALPHA X $\sqrt{}$ 2 + ALPHA X

- Để thử với $x = 0$, ta ấn:

CALC 0 =

- Để thử với $x = 5$, ta ấn:

CALC 5 =

- Để thử với $x = 4$, ta ấn:

CALC 4 =

- Để thử với $x = 1$, ta ấn:

CALC 1 =

Vậy, các em sẽ lựa chọn câu trả lời trắc nghiệm là $x = 1$.

- Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ điểm.

- Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cụ Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN THPT

bao gồm 4 cuốn:

- 40 ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM TOÁN 10.
- 40 ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM TOÁN 11.
- 40 ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM TOÁN 12.
- BỘ ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM MÔN TOÁN TỐT NGHIỆP THPT, ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG.

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm Cụ Môn do Lê Hồng Đức phụ trách

Số nhà 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội

Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0983046689

E-mail: lehongduc39@yahoo.com hoặc ducha7282@vnn.vn.

Sách-phát hành tại 20 Nguyễn Thị Minh Khai – Q.1 – TP.HCM

Điện thoại: 8246706 hoặc 8239998

Hà Nội, ngày 8 tháng 1 năm 2007
 NHÓM CỤ MÔN – LÊ HỒNG ĐỨC

PHẦN I

40 ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG

A. ĐẠI SỐ

(Đề kiểm tra chất lượng theo chương)

CHƯƠNG I

MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

ĐỀ SỐ 1

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (2 điểm): Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề. Nếu là mệnh đề thì hãy nói nó đúng hay sai:

- | | | |
|-----------------------|-----------------------------------|--|
| a. $3 + 19 = 21$. | ☐ Mệnh đề. | ☐ Không là mệnh đề. |
| b. 81 chia hết cho 9. | ☐ Mệnh đề. | ☐ Không là mệnh đề. |
| c. $x^2 + 2y > 8$. | ☐ Mệnh đề. | ☐ Không là mệnh đề. |
| d. $x + y$ và xy . | ☐ Mệnh đề. | ☐ Không là mệnh đề. |

Câu II. (2 điểm): Chứng minh rằng $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với a, b là hai số dương.

Câu III. (3 điểm):

- a. Xác định tập hợp A bằng cách liệt kê phân tử, từ đó chỉ ra $\mathcal{P}(A)$, biết:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < x^2 < 20\}.$$

- b. Chứng minh rằng $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

- c. Điền dấu "x" vào ô trống thích hợp

- | | | |
|--|-------------------------------|------------------------------|
| ▪ $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (2, 1, 5, 4) \Rightarrow x \in (2, 5)$ | Đúng ☐ | Sai ☐ |
| ▪ $\forall x \in \mathbb{R}, x \in (2, 1, 5, 4) \Rightarrow x \in (2, 6)$ | Đúng ☐ | Sai ☐ |
| ▪ $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$ | Đúng ☐ | Sai ☐ |
| ▪ $\forall x \in \mathbb{R}, -4,3 < x \leq -3 \Rightarrow -5 \leq x \leq -3$ | Đúng ☐ | Sai ☐ |

Câu IV. (3 điểm):

- a. Một tam giác có ba cạnh đo được như sau: $a = 6,3\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$, $b = 10\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$ và $c = 15\text{cm} \pm 0,5\text{cm}$. Chứng minh rằng chu vi P của tam giác là $P = 31,3\text{cm} \pm 0,5\text{cm}$.
- b. Một đơn vị thiên văn xấp xỉ bằng $1,496 \cdot 10^8$ km. Một trạm vũ trụ di chuyển với vận tốc trung bình là 15000m/s . Hỏi trạm vũ trụ đó phải mất bao nhiêu giây mới đi được một đơn vị thiên văn?

ĐỀ SỐ 2

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (2 điểm): Xét chân trị các mệnh đề sau:

- | | | |
|--|--------------------------------|-------------------------------|
| a. $(2 > 1) \Rightarrow (1 < 3)$. | ☐ Đúng. | ☐ Sai. |
| b. $(2 > 3) \Rightarrow (3 + 1 < 3)$. | ☐ Đúng. | ☐ Sai. |
| c. $(3 - 2 = 1) \Leftrightarrow (1 + 1 = 3)$. | ☐ Đúng. | ☐ Sai. |
| d. $(2 = 1) \Leftrightarrow (3 = 2)$. | ☐ Đúng. | ☐ Sai. |

Câu II. (2 điểm): Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương thì $13^n - 1$ chia hết cho 12.

Câu III. (3 điểm):

- a. Xác định các tập hợp $A \cap B$ bằng hai cách, biết:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ước của } 12\} \text{ và } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ước của } 15\}.$$

- b. Cho hai tập:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4\},$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 12\},$$

Chứng minh rằng $A = B$.

- c. Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d\}$, $C = \{b, c, e\}$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.

Câu IV. (3 điểm):

- a. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π . Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này, biết $3,1415 < \pi < 3,1416$.
- b. Một cái sân hình chữ nhật với chiều rộng là $x = 2,56\text{m} \pm 0,01\text{m}$ và chiều dài là $y = 4,2\text{m} \pm 0,01\text{m}$. Chứng minh rằng chu vi P của sân là $13,52 \pm 0,04$.

CHƯƠNG II **HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI**

ĐỀ SỐ 3

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (2 điểm):

- a. Tìm tập xác định của hàm số:

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

- A. $\mathbb{R}$. B. $(0, +\infty)$. C. $(1, +\infty)$. D. $(-\infty, 0)$.

- b. Cho hàm số:

$$y = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + 2x + m - 1.$$

Xác định m để hàm số là hàm lẻ.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = \pm 1$.

Câu II. (4 điểm): Cho hàm số:

$$y = -x + 3.$$

- a. Gọi A và B theo thứ tự là hai giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành. Vẽ đồ thị hàm số và tính diện tích ΔOAB (O là gốc toạ độ).

- A. $S = \frac{9}{2}$. B. $S = \frac{5}{2}$. C. $S = \frac{3}{2}$. D. $S = \frac{1}{2}$.

b. Gọi α là góc nhọn tạo bởi đồ thị hàm số với trục Ox . Tính $\tan \alpha$, suy ra số đo góc α .

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 90^\circ$.

Câu III. (4 điểm): Cho hàm số:

$$y = f(x) = x^2 - 4x + 2.$$

- a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
b. Từ đó lựa chọn phép tịnh tiến song song với trục Ox để nhận được đồ thị hàm số $y = x^2 - 2$.
A. Tịnh tiến Ox sang trái 3 đơn vị. C. Tịnh tiến Ox sang trái 2 đơn vị.
B. Tịnh tiến Ox sang phải 3 đơn vị. D. Tịnh tiến Ox sang phải 2 đơn vị.
c. Giải thích tại sao với mỗi giá trị của m thì các phương trình:

$$x^2 - 4x + 2 = m \text{ và } x^2 - 2 = m.$$

đều có cùng số nghiệm.

ĐỀ SỐ 4

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (2 điểm):

a. Cho hàm số:

$$y = \frac{x+1}{x-m+2}.$$

Tìm m để hàm số xác định trên $[-1, 1)$.

- A. $m \leq 1 \vee m \geq 3$. C. $m < 1 \vee m > 3$.
B. $m < 1 \vee m \geq 3$. D. $m \leq 1 \vee m > 3$.

b. Tìm a để hàm số sau đồng biến trên $(2, +\infty)$:

$$y = \frac{ax}{x-2}.$$

- A. $a < 0$. B. $a > 0$. C. $a < 2$. D. $a > 2$.

Câu II. (4 điểm): Cho hàm số:

$$y = mx - \sqrt{1-m}.$$

a. Tìm m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

- A. $m \leq 1$. B. $0 \neq m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $m \neq 0$.

b. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $0 < m \leq 1$. B. $0 \neq m \leq 1$. C. $m \geq 2$. D. $m \neq 1$.

Câu III. (4 điểm): Cho hàm số:

$$(P): y = 2x^2 - 2x.$$

- a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (P) .
b. Bằng đồ thị tìm x để $y > 0, y \leq 0$.
c. Dựa vào đồ thị vừa vẽ trên, tùy theo giá trị của m , hãy cho biết số nghiệm của phương trình:

$$2x^2 - 2x + 1 - m = 0.$$

CHƯƠNG III
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

ĐỀ SỐ 5

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (2 điểm): Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:

$$\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = 2.$$

A. $m = \pm 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = -2$.

B. $m = 1$ hoặc $m = -2$.

D. $m = 1$ hoặc $m = 2$.

Câu II. (2 điểm): Cho ba số dương a, b, c và phương trình:

$$x^2 - 2x - \frac{a}{b+c} - \frac{b}{c+a} - \frac{c}{a+b} + \frac{5}{2} = 0.$$

Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, từ đó xác định điều kiện của a, b, c để phương trình có nghiệm kép.

A. $a = b = c$.

B. $a = b$.

C. $a = c$.

D. $b = c$.

Câu III. (3 điểm):

a. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$x - 3y = 4.$$

b. Tìm m nguyên để hệ phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases}.$$

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Câu IV. (3 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}.$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 26$.

A. $(1, 2)$ và $(2, 1)$.

C. $(2, 5)$ và $(5, 2)$.

B. $(1, 5)$ và $(5, 1)$.

D. $(3, 5)$ và $(5, 3)$.

b. Xác định m để hệ vô nghiệm.

A. $m < 1$.

B. $m < 8$.

C. $m < 18$.

D. Vô nghiệm

c. Xác định m để hệ có nghiệm duy nhất, xác định nghiệm đó.

A. $m = 1$ và $(1, 1)$.

C. $m = 18$ và $(3, 3)$.

B. $m = 8$ và $(4, 4)$.

D. $m = 11$ và $(2, 2)$.

ĐỀ SỐ 6

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (2 điểm): Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x-m}.$$

A. Mọi m .

C. $m = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

B. $m = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. $m = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$.

Câu II. (2 điểm): Cho phương trình:

$$(m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 1 = 0.$$

Tìm giá trị của m để phương trình có một nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Câu III. (3 điểm):

a. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$3x + y = 6.$$

b. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I.

- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $m > 1$. D. $0 < m < 1$.

Câu IV. (3 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m \quad (*) \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 0$.

- A. $(0, 0)$ và $(1, 1)$. C. $(1, 1)$ và $(2, 2)$.
B. $(0, 0)$ và $(2, 2)$. D. $(3, 3)$ và $(2, 2)$.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 4$.

c. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

CHƯƠNG IV **BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

ĐỀ SỐ 7

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (2 điểm): Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta luôn có:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}.$$

Câu II. (4 điểm):

a. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm:

$$m^2x + 4m - 3 < x + m^2$$

- A. $m = 0$. B. $m < 0$. C. $m = 1$. D. $m > 1$.

b. Giải bất phương trình:

$$(x - 2)(x^3 + x^2 - 6x) \leq 0.$$

- A. $T = (-1, 0) \cup \{2\}$. C. $T = (0, 3) \cup \{-2\}$.
B. $T = (-3, 0) \cup \{2\}$. D. $T = (0, 4) \cup \{-2\}$.

Câu III. (2 điểm): Giải bất phương trình:

$$\frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 8x + 15} \geq 0.$$

- A. $T = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3).$
B. $T = (-1, 1) \cup (5, +\infty).$
C. $T = (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 3) \cup (5, +\infty).$
D. $T = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 3) \cup (5, +\infty).$

Câu IV. (2 điểm): Giải bất phương trình:

$$|x - 5| - x^2 + 7x - 9 \geq 0.$$

- A. $T = [-3 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{2}].$ C. $T = [3, 4 + \sqrt{2}].$
B. $T = [3 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{2}].$ D. $T = [3 - \sqrt{5}, 4].$

ĐỀ SỐ 8

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (2 điểm): Chứng minh rằng với mọi số thực a, b , ta luôn có:

$$|a \pm b| \geq |a| - |b|.$$

Câu II. (4 điểm):

a. Xác định m sao cho hai bất phương trình sau tương đương:

$$(m - 1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m + 1)x - m + 2 > 0.$$

- A. $m = 1.$ B. $m = -1.$ C. $m = 2.$ D. $m = 5.$
b. Giải bất phương trình:

$$\frac{|x - 2|}{x^2 - 5x + 6} \geq 3.$$

- A. $T = (3, 4].$ C. $T = (3, 4).$
B. $T = (3, \frac{10}{3}].$ D. $T = (3, \frac{10}{3}).$

Câu III. (2 điểm): Xác định m sao cho với mọi x , ta đều có:

$$6 < \frac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 9.$$

- A. $-1 < m < 0.$ B. $2 < m < 6.$ C. $m > 6.$ D. $-3 < m < 6.$
Câu IV. (2 điểm): Giải bất phương trình:

$$x + 1 \geq \sqrt{2(x^2 - 1)}.$$

- A. $T = [1, 3].$ C. $T = (1, 3).$
B. $T = [1, 3] \cup \{-1\}.$ D. $T = (1, 3) \cup \{-1\}.$

ĐỀ SỐ 9

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho $a, b, c \geq 0$, chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Câu II. (4 điểm):

a. Với giá trị nào của m thì hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 \\ mx + m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

A. $m = -\frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

b. Giải bất phương trình:

$$\frac{3}{2x-1} \leq \frac{2}{x-1}.$$

A. $T = [-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

C. $T = [1, 2) \cup (3, +\infty)$.

B. $T = [-1, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$.

D. $T = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, +\infty)$.

Câu III. (2 điểm): Giải bất phương trình:

$$\frac{|x^2 - 4x| + 3}{x^2 + |x - 5|} \geq 1.$$

A. $T = (-\infty, -\frac{2}{3})$.

C. $T = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$.

B. $T = [\frac{1}{2}, 2]$.

D. $T = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [\frac{1}{2}, 2]$.

Câu IV. (2 điểm): Giải bất phương trình:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3.$$

A. $T = [-2, 2] \setminus \{0\}$.

C. $T = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

B. $T = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

D. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

CHƯƠNG V THỐNG KÊ

ĐỀ SỐ 10

Sử dụng máy tính Casio Fx – 570MS để thực hiện các tính toán thống kê

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (3 điểm): Hãy thực hiện:

a. Nhập dữ liệu thống kê về chiều cao của học sinh nam lớp 11A (có 8 em) vào trong bảng sau vào máy tính:

STT	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiều cao	1,54	1,65	1,54	1,66	1,69	1,72	1,54	1,9

b. Sửa đổi dữ liệu về chiều cao trong cột 4 thành 1,48.

c. Xóa dữ liệu ở cột 8.

d. Thêm dữ liệu có giá trị 1,75.

e. Xóa bộ số liệu vừa nhập.

Câu II. (7 điểm): Áp suất theo nhiệt độ được cho bởi bảng:

Nhiệt độ	Áp suất
10°C	1003hPa
15°C	1005hPa
20°C	1010hPa
25°C	1011hPa
30°C	1014hPa

Sử dụng hồi quy tuyến tính ($y = A + Bx$) để xác định công thức hồi quy (tính A, B) và hệ số tương quan r. Tiếp theo, hãy sử dụng công thức hồi quy trên để ước lượng cho áp suất ở nhiệt độ 18°C và nhiệt độ khi áp suất bằng 1000hPa. Cuối cùng, tính hệ số tới hạn r^2 và số hiệp biến $\left(\frac{\sum xy - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} \right)$.

ĐỀ SỐ 11

(Thời gian 45 phút)

Câu I. (3 điểm): Hãy thực hiện:

- a. Nhập dữ liệu trong bảng tần số sau vào máy tính và tính $\bar{X}$:

Tần số	14	3	1	2
Điểm T	7,5	9	9,5	10

- b. Sửa đổi dữ liệu (14; 7,5) thành (24; 7) và tính $\bar{X}$.
 c. Xoá dữ liệu ở cột (2; 10) và tính $\bar{X}$.
 d. Thêm dữ liệu (20; 7) và tính $\bar{X}$.
 e. Xoá bộ số liệu vừa nhập.

Câu II. (7 điểm): Cho dữ liệu:

x_i	29	50	74	103	118
y_i	1,6	23,5	38	46,6	48

Dùng hồi quy bậc hai để tìm công thức hồi quy (tìm các hệ số A, B, C) ứng với bảng dữ liệu trên. Tiếp theo, sử dụng công thức hồi quy vừa tìm được để ước lượng các giá trị cho $\hat{y}$ (giá trị ước lượng của y) tại $x_i = 16$ và $\hat{x}$ tại $y_i = 20$.

CHƯƠNG VI

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

ĐỀ SỐ 12

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (3 điểm): Biết $\cot \alpha = 3$.

- a. (2 điểm): Tính $\cos \alpha$, $\sin \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$ và $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. C. $\cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ và $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.
 B. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$ và $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$ và $\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

- b. (1 điểm): Tính giá trị của biểu thức $C = \frac{1}{\cos^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha}$.
- A. $C = \frac{10}{7}$. B. $C = \frac{11}{9}$. C. $C = \frac{12}{11}$. D. $C = 1$.

Câu II. (5 điểm):

- a. (1 điểm): Tính tổng:

$$S = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ.$$

- A. $S = -1$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 4$.

- b. (2 điểm): Biết:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} = 6.$$

Tính giá trị của $\cos 2x$.

- A. $\cos 2x = -1$. B. $\cos 2x = 0$. C. $\cos 2x = \frac{1}{2}$. D. $\cos 2x = \frac{2}{3}$.

- c. (2 điểm): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 2 + 2\sin x + \cos^2 x.$$

- A. $y_{\max} = 5$ và $y_{\min} = -1$. C. $y_{\max} = 3$ và $y_{\min} = 1$.
 B. $y_{\max} = 4$ và $y_{\min} = 0$. D. $y_{\max} = 2$ và $y_{\min} = 1$.

Câu III. (2 điểm): Cho ΔABC , chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$$

ĐỀ SỐ 13

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (3 điểm): Biết $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

- a. (2 điểm): Tính $\sin \alpha$, $\tan \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\tan \alpha = -1$. C. $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\tan \alpha = -\frac{8}{15}$.
 B. $\sin \alpha = \frac{17}{15}$, $\tan \alpha = -\frac{17}{8}$. D. $\sin \alpha = \frac{15}{17}$, $\tan \alpha = -\frac{15}{8}$.

- b. (1 điểm): Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{5 \cot \alpha + 4 \tan \alpha}{5 \cot \alpha - 4 \tan \alpha}$.

- A. $A = -5$. B. $A = 4$. C. $A = -\frac{21}{19}$. D. $A = -\frac{61}{29}$.

Câu II. (5 điểm):

- a. (1 điểm): Tính tổng:

$$S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ.$$

- A. $S = 180$. B. $S = 90$. C. $S = 45$. D. $S = 1$.

b. (2 điểm): Biết:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b = m \\ \sin a + \sin b = n \end{cases}, \text{ với } m, n \neq 0.$$

Tính giá trị của $\sin(a + b)$.

A. $\frac{mn}{m^2 + n^2}$. B. $\frac{2mn}{m^2 + n^2}$. C. $\frac{m^2 + n^2}{mn}$. D. $\frac{m + n}{mn}$.

c. (2 điểm): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \sin^2 x + 2\sin x + 5.$$

A. $y_{\text{Max}} = 5$ và $y_{\text{Min}} = 1$.

C. $y_{\text{Max}} = 8$ và $y_{\text{Min}} = 3$.

B. $y_{\text{Max}} = 7$ và $y_{\text{Min}} = 5$.

D. $y_{\text{Max}} = 8$ và $y_{\text{Min}} = 4$.

Câu III. (2 điểm): Cho $\triangle ABC$, chứng minh rằng:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C.$$

B. HÌNH HỌC

(Để kiểm tra chất lượng theo chương)

CHƯƠNG I

VECTƠ

ĐỀ SỐ 14

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hai vectơ tùy ý $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Các hệ thức sau đúng hay sai ?

a. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Đúng ☐

Sai ☐

b. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Đúng ☐

Sai ☐

Câu II. (2 điểm): Cho ΔABC . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Đẳng thức vectơ sau là đúng hay sai (Giải thích việc lựa chọn) ?

a. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

Đúng ☐

Sai ☐

Câu III. (4 điểm): Cho ΔABC , điểm M trong mặt phẳng thoả mãn:

$$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$

a. Chứng minh rằng MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Gọi P là trung điểm của CN. Chứng minh rằng MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

Câu IV. (2 điểm): Cho hai điểm A(-1, 1), B(1, 3).

a. Xác định tọa độ của các vectơ $\vec{AB}$, $\vec{BA}$.

A. $\vec{AB}(2, 2)$ và $\vec{BA}(-2, -2)$.

C. $\vec{AB}(-2, 2)$ và $\vec{BA}(2, -2)$.

B. $\vec{AB}(-2, -2)$ và $\vec{BA}(2, 2)$.

D. $\vec{AB}(2, -2)$ và $\vec{BA}(-2, 2)$.

b. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\vec{BM}(3, 0)$.

A. M(1, 3).

B. M(3, 4).

C. M(4, 3).

D. M(3, 1).

ĐỀ SỐ 15

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a. Nếu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ thì $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Đúng ☐

Sai ☐

b. $\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

Đúng ☐

Sai ☐

c. $\vec{a} - (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Đúng ☐

Sai ☐

Câu II. (2 điểm): Cho $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta A_2B_2C_2$ lần lượt có trọng tâm là G_1, G_2 . Đẳng thức vectơ sau là đúng hay sai (Giải thích việc lựa chọn) ?

$$\vec{A_1A_2} + \vec{B_1B_2} + \vec{C_1C_2} = 3\vec{G_1G_2}.$$

Đúng ☐

Sai ☐

Câu III. (4 điểm): Cho ΔABC , có các cạnh a, b, c. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là chân các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C.

a. Tính $\vec{AA_1}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

- b. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều nếu

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

Câu IV. (2 điểm): Cho ΔABC , biết $A(1, -3)$, $B(3, -5)$, $C(2, -2)$. Tìm tọa độ:

- a. Giao điểm E của BC với phân giác trong của góc A.

A. $E(\frac{4}{3}, -4)$. B. $E(\frac{4}{3}, 4)$. C. $E(-\frac{4}{3}, 4)$. D. $E(-\frac{4}{3}, -4)$.

- b. Giao điểm F của BC với phân giác ngoài của góc A.

A. $F(4, -8)$. B. $F(-4, -8)$. C. $F(-4, 8)$. D. $F(4, 8)$.

CHƯƠNG II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

ĐỀ SỐ 16

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Tính giá trị của biểu thức:

$$A = 4\sin^4 135^\circ + \sqrt{3} \cos^3 150^\circ - 3\cot^2 120^\circ.$$

A. $A = -\frac{1}{8}$. B. $A = \frac{1}{8}$. C. $A = \frac{9}{8}$. D. $A = -\frac{9}{8}$.

Câu II. (4 điểm): Cho ΔABC có các cạnh bằng a, b, c.

- a. (1 điểm): Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 + a^2)$.

- b. (1 điểm): Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

A. $-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. C. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

B. $-2(a^2 + b^2 + c^2)$. D. $2(a^2 + b^2 + c^2)$.

- c. (1 điểm): Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC , tính độ dài AM từ đó suy ra độ dài AG.

A. $AM = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ và $AG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

B. $AM = \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$ và $AG = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$.

C. $AM = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ và $AG = \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

D. $AM = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ và $AG = \frac{1}{3} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

d. (1 điểm): Tính cosin góc nhọn tạo bởi AG và BC.

A. $\frac{|b^2 - c^2|}{a\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}$

C. $\frac{|a^2 - c^2|}{b\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}$

B. $\frac{|b^2 - a^2|}{c\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}$

D. $\frac{ab}{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Câu III. (4 điểm): Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Tính:

a. (1 điểm): Diện tích S của tam giác.

A. $S = \frac{1}{2}$ B. $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $S = \frac{3\sqrt{15}}{2}$ D. $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

b. (1,5 điểm): Các đường cao h_a , h_b , h_c .

A. $h_a = \frac{1}{4}$, $h_b = \frac{1}{3}$ và $h_c = \frac{1}{2}$

B. $h_a = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $h_b = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $h_c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $h_a = \frac{3\sqrt{15}}{4}$, $h_b = \sqrt{15}$ và $h_c = \frac{3\sqrt{15}}{2}$

D. $h_a = \frac{3\sqrt{15}}{8}$, $h_b = \frac{\sqrt{15}}{2}$ và $h_c = \frac{3\sqrt{15}}{4}$

c. (1,5 điểm): Các bán kính R , r .

A. $R = 6$ và $r = \frac{1}{9}$

C. $R = \frac{4\sqrt{15}}{15}$ và $r = \frac{3\sqrt{15}}{9}$

B. $R = 4\sqrt{3}$ và $r = \frac{\sqrt{3}}{9}$

D. $R = \frac{8\sqrt{15}}{15}$ và $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$

ĐỀ SỐ 17

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{a^2 \cdot \sin 180^\circ - b^3 \sqrt{2} \cdot \sin 135^\circ - 2ab^2 \cdot \cos 150^\circ}{a \cdot \cot 150^\circ - b \cdot \cos 0^\circ + 2a \cdot \tan 60^\circ}$$

A. $A = a^2$ B. $A = b^2$ C. $A = a^2 + b^2$ D. $A = a^3 + b^3$

Câu II. (4 điểm): Cho $\triangle ABC$, biết $A(1, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(5, -1)$.

a. (1 điểm): Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. -8.

B. -5.

C. 5.

D. 8.

b. (1 điểm): Tính cos và sin góc A.

A. $\cos \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \hat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\cos \hat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

B. $\cos \hat{A} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \hat{A} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

D. $\cos \hat{A} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin \hat{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

LC / 1778

c. (1 điểm): Tìm tọa độ chân đường cao A_1 hạ từ A của ΔABC .

- A. $A_1(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. B. $A_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. C. $A_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. D. $A_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

d. (1 điểm): Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC .

- A. $H(-2, 5)$. B. $H(2, -5)$. C. $H(2, 5)$. D. $H(-2, -5)$.

Câu III. (4 điểm):

a. (2 điểm): Cho ΔABC , biết $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 4$, đường cao AD. Tính độ dài đoạn CD.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

b. (2 điểm): Cho hai đường tròn (I_1) , (I_2) có bán kính bằng 2, 8 tiếp xúc trong với nhau tại A. Nửa đường thẳng vuông góc với I_1I_2 cắt (I_1) , (I_2) theo thứ tự tại B, C. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

- A. $R = 1$. B. $R = 2$. C. $R = 3$. D. $R = 4$.

ĐỀ SỐ 18*

(Thời gian 60 phút)

Câu I. (2 điểm): Chứng minh rằng:

$$\left(\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right)^2 = 4 \tan^2 \alpha.$$

Câu II. (1 điểm): Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC, BD là hai dây cung thuộc nửa đường tròn, cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

$$\overline{AE} \cdot \overline{AC} + \overline{BE} \cdot \overline{BD} = AB^2.$$

Câu III. (3 điểm): Cho hình thang vuông ABCD, hai đáy $AD = a$, $BC = b$, đường cao $AB = h$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h sao cho:

a. (1 điểm): $BD \perp CI$, với I là trung điểm của AB.

- A. $h^2 = ab$. B. $h^2 = 2ab$. C. $h^2 = 4ab$. D. $h^2 = 8ab$.

b. (1 điểm): $AC \perp DI$.

- A. $h^2 = ab$. B. $h^2 = 2ab$. C. $h^2 = 4ab$. D. $h^2 = 8ab$.

c. (1 điểm): $BM \perp CN$, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AC và BD.

- A. $h^2 = a^2 + b^2 - ab$. C. $h^2 = 2b^2 - ab$.
B. $h^2 = a^2 + b^2 + ab$. D. $h^2 = 2a^2 - ab$.

Câu IV. (4 điểm):

a. (1 điểm): Cho ΔABC , có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính đường tròn cắt cả 3 cạnh của ΔABC và chắn trên mỗi cạnh 1 dây có độ dài bằng 2.

- A. $R = \frac{\sqrt{20 - 9\sqrt{3}}}{2}$. C. $R = \frac{\sqrt{2 - 9\sqrt{3}}}{2}$.
B. $R = \frac{\sqrt{40 - 18\sqrt{3}}}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{4 - \sqrt{3}}}{2}$.

- b. (1 điểm): Cho ΔABC , biết $BC = 6$. Lấy E, F theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EF song song với BC và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp ΔABC . Tính chu vi ΔABC , biết $EF = 2$.

A. 1. B. 2. C. 9. D. 18.

- c. (2 điểm): Cho ΔABC , biết:

$$\frac{A \cdot \sin A + B \cdot \sin B}{A + B} + \frac{B \cdot \sin B + C \cdot \sin C}{B + C} + \frac{C \cdot \sin C + A \cdot \sin A}{C + A} = \sin A + \sin B + \sin C.$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

CHƯƠNG III PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

ĐỀ SỐ 19

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (3 điểm): Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): kx - y + k = 0,$$

$$(d_2): (1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0.$$

- a. (1 điểm): Chứng minh rằng khi k thay đổi (d_1) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm toạ độ điểm cố định đó.

A. $M(-1, 0)$. B. $M(1, 0)$. C. $M(0, -1)$. D. $M(0, 1)$.

- b. (1 điểm): Với mỗi giá trị của k, hãy xác định giao điểm của (d_1) và (d_2) .

A. $I\left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}, \frac{2k}{1 + k^2}\right)$. C. $I\left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}, \frac{k}{1 + k^2}\right)$.

B. $I\left(\frac{2k}{1 + k^2}, \frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)$. D. $I\left(\frac{k}{1 + k^2}, \frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)$.

- c. (1 điểm): Tìm quỹ tích của giao điểm đó khi k thay đổi.

A. $x^2 + y^2 = 1$. B. $x^2 - y^2 = 1$. C. $x^2 + 2y^2 = 1$. D. $2x^2 + y^2 = 1$.

Câu II. (4 điểm):

- a. (2 điểm): Lập phương trình đường tròn (C) đi qua điểm $A(-1, -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng (d): $7x - y - 5 = 0$ tại điểm $M(1, 2)$.

A. (C): $(x + 6)^2 + (y + 3)^2 = 50$. C. (C): $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$.

B. (C): $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$. D. (C): $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 50$.

- b. (2 điểm): Cho đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

Lập phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với $(\Delta): 2x + y - 4 = 0$ một góc bằng 45° .

A. $(d_1): x + 3y + 8 = 0, (d_2): 3x - y + 14 = 0, (d_3): x + 3y - 12 = 0, (d_4): 3x - y - 6 = 0$.

B. $(d_1): x + 3y - 8 = 0, (d_2): 3x - y - 14 = 0, (d_3): x + 3y + 12 = 0, (d_4): 3x - y + 6 = 0$.

C. $(d_1): x - 3y - 8 = 0, (d_2): 3x + y - 14 = 0, (d_3): x - 3y + 12 = 0, (d_4): 3x + y + 6 = 0$.

D. $(d_1): x - 3y + 8 = 0, (d_2): 3x + y + 14 = 0, (d_3): x - 3y - 12 = 0, (d_4): 3x + y - 6 = 0$.

Câu III. (3 điểm): Cho điểm $M(1, 1)$ và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

- (1 điểm): Chứng minh rằng mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.
- (2 điểm): Lập phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt Elíp trên tại hai điểm A, B sao cho $MA = MB$.

A. (d): $4x + 9y - 13 = 0$.	C. (d): $4x - 9y - 13 = 0$.
B. (d): $4x + 9y + 13 = 0$.	D. (d): $4x - 9y + 13 = 0$.

ĐỀ SỐ 20

(Thời gian 90 phút)

Câu I. (3 điểm): Cho ΔABC cân tại A, biết phương trình cạnh AB có dạng:

$$(AB): 3\sqrt{7}x - y - 3\sqrt{7} = 0,$$

điểm B, C thuộc trục hoành và A thuộc góc phần tư thứ nhất.

- (2 điểm): Xác định tọa độ các đỉnh của ΔABC , biết rằng $p = 9$.

A. $A(1, 0), B(2, 3\sqrt{7}), C(3, 0)$.	C. $A(2, 3\sqrt{7}), B(1, 0), C(3, 0)$.
B. $A(3, 0), B(1, 0), C(2, 3\sqrt{7})$.	D. $A(2, 3\sqrt{7}), B(3, 0), C(1, 0)$.
- (1 điểm): Tìm tọa độ điểm $M \in AB$ và $N \in BC$ sao cho đường thẳng MN đồng thời chia đôi chu vi và chia đôi diện tích của ΔABC .

A. $M(1, 0)$ và $N(2, 0)$.	C. $M(2, 3\sqrt{7})$ và $N(2, 0)$.
B. $M(3, 0)$ và $N(0, 2)$.	D. $M(2, 3\sqrt{7})$ và $N(0, 2)$.

Câu II. (3 điểm): Cho ba điểm $A(0, a), B(b, 0), C(-b, 0)$ với $a, b > 0$.

- Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với AB tại B, và tiếp xúc với AC tại C.

A. (C): $x^2 + (y + \frac{a^2}{b})^2 = a^2 + \frac{a^4}{b^2}$.	C. (C): $x^2 + (y + \frac{b^2}{a})^2 = b^2 + \frac{b^4}{a^2}$.
---	---

B. (C): $x^2 + (y - \frac{a^2}{b})^2 = a^2 - \frac{a^4}{b^2}$.	D. (C): $x^2 + (y - \frac{b^2}{a})^2 = b^2 - \frac{b^4}{a^2}$.
---	---

- Gọi M là điểm bất kỳ trên đường tròn ở phần 1). Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC. Chứng minh $d_1 \cdot d_2 = d_3^2$.

Câu III. (2 điểm): Cho Parabol (P) có phương trình:

$$(P): y = x^2.$$

Một góc vuông ở đỉnh O cắt Parabol tại A_1 và A_2 . Hình chiếu của A_1 và A_2 lên Ox là B_1 và B_2 .

- (1 điểm): Tính giá trị của $OB_1 \cdot OB_2$.

A. 1.	B. 3.	C. 6.	D. 12.
-------	-------	-------	--------
- (1 điểm): Tìm điểm cố định mà A_1A_2 luôn đi qua.

A. $I(0, -1)$.	B. $I(0, 1)$.	C. $I(-1, 0)$.	D. $I(1, 0)$.
-----------------	----------------	-----------------	----------------

Câu IV. (2 điểm): Cho điểm $M(3, -4)$ và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

- a. (1 điểm): Chứng minh rằng qua M có thể kẻ được 2 tiếp tuyến đến (E). Xác định phương trình 2 tiếp tuyến.
- A. $(d_1): x - 3 = 0, (d_2): x + 2y + 5 = 0$. C. $(d_1): x - 3 = 0, (d_2): 2x + y + 5 = 0$.
 B. $(d_1): x + 3 = 0, (d_2): x + 2y + 5 = 0$. D. $(d_1): x + 3 = 0, (d_2): 2x + y + 5 = 0$.
- b. (1 điểm): Giả sử hai tiếp tuyến tiếp xúc với (E) theo thứ tự tại M_1, M_2 . Lập phương trình đường thẳng (M_1M_2) .
- A. $(M_1M_2): x - 3y - 3 = 0$. C. $(M_1M_2): 3x - y - 3 = 0$.
 B. $(M_1M_2): x - 3y + 3 = 0$. D. $(M_1M_2): 3x - y + 3 = 0$.

C. 10 ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 21

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = -\frac{1}{2}x.$$

- a. (1 điểm): Vẽ đồ thị hàm số.
- b. (1 điểm): Xác định tọa độ điểm B thuộc đồ thị hàm số sao cho $x_B = 4y_B + 2$.
- A. $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. B. $B(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$. C. $B(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. D. $B(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Câu II. (2 điểm): Cho phương trình:

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0.$$

Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.

- A. $m = -6$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 6$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$$

- a. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.
- A. $m < 1$. B. $m < 4$. C. $m > 2$. D. Mọi m.
- b. Tìm giá trị của m để hệ có nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I.
- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $m > 1$. D. $0 < m < 1$.

Câu IV. (2 điểm): Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC, sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN.

- a. Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
 B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b. Gọi D là trung điểm của BC. Biểu diễn $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$.

Câu V. (2 điểm): Cho ΔABC , có $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 + c^2}$, $AC = \sqrt{a^2 + c^2}$ với a, b, c là ba độ dài cho trước. Chứng minh rằng ΔABC nhọn.

ĐỀ SỐ 22

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = -x + 3.$$

a. (0,5 điểm): Xác định tọa độ giao điểm A, B của đồ thị hàm số với trục tung và trục hoành.

A. A(0, 1) và B(1, 0).

C. A(0, 3) và B(3, 0).

B. A(0, 2) và B(2, 0).

D. A(0, 4) và B(4, 0).

Vẽ đồ thị hàm số.

b. (0,5 điểm): Tính diện tích ΔOAB (O là gốc tọa độ).

A. $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}$.

B. $S_{\Delta OAB} = 2$.

C. $S_{\Delta OAB} = \frac{9}{2}$.

D. $S_{\Delta OAB} = 8$.

c. (0,5 điểm): Gọi α là góc nhọn tạo bởi đồ thị hàm số với trục Ox. Tính $\tan \alpha$, suy ra số đo góc α .

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 90^\circ$.

d. (0,5 điểm): Bằng đồ thị tìm x để $y > 0$, $y \leq 0$.

A. $y > 0 \Leftrightarrow x < 1$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

C. $y > 0 \Leftrightarrow x < 3$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

B. $y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

D. $y > 0 \Leftrightarrow x < 4$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Câu II. (2 điểm): Cho phương trình:

$$x^2 - 2x - m = 0.$$

Xác định m để phương trình:

a. Có nghiệm dương.

A. $m \geq -1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \leq 1$.

b. Có đúng một nghiệm dương.

A. $m \geq 0$ hoặc $m = -1$.

C. $m \geq 1$ hoặc $m = -1$.

B. $m \leq 0$ hoặc $m = 1$.

D. $m \leq -1$ hoặc $m = 0$.

c. Có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $-1 < m < 0$.

B. $0 < m < 1$.

C. $-1 < m < 1$.

D. $m > 1$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 4$.

A. (2, 1).

B. (1, 2).

C. (-2, 1).

D. (1, -2).

b. Tìm m để hệ phương trình có đúng một nghiệm.

A. $m = -4$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 4$. D. Vô nghiệm.

Câu IV. (3 điểm): Cho ΔABC , có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A và M là trung điểm BC .

a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c .

A. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$.

C. $\frac{1}{2}(-a^2 + b^2 - c^2)$.

B. $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

D. $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$.

b. Tính AM .

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}$.

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$.

D. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + b^2 + a^2}$.

c. Tính AD .

A. $\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

C. $\frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$.

B. $\frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$.

D. $\frac{2}{a+b+c}\sqrt{abc}$.

Câu V. (1 điểm): Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng $AB \perp CD$ khi và chỉ khi $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

ĐỀ SỐ 23

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = ax - 3a.$$

a. (1 điểm): Xác định giá trị của a để đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0, 4)$.

A. $a = -\frac{4}{3}$.

B. $a = -\frac{2}{3}$.

C. $a = \frac{2}{3}$.

D. $a = \frac{4}{3}$.

Vẽ đồ thị hàm số với a vừa tìm được.

b. (1 điểm): Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng tìm được trong a).

A. $\frac{12}{5}$.

B. $\frac{8}{5}$.

C. $\frac{6}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Câu II. (2 điểm): Cho phương trình:

$$x^2 - 6x - 7 - m = 0.$$

Xác định m để phương trình:

a. Có nghiệm thuộc $D = (-\infty, 0) \cup (7, +\infty)$.

A. $m > -7$.

B. $m < -7$.

C. $m > 0$.

D. $m < 0$.

b. Có đúng một nghiệm thuộc D .

A. $-7 < m \leq 0$.

B. $-7 < m < 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \leq 0$.

c. Có hai nghiệm phân biệt thuộc D.

- A. $\pi > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m \leq 0$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - m = 0 \\ y^2 + 2x - 2m - 3 = 0 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 1$.

- A. (2, 1) và (2, 3). C. (1, 2) và (2, 3).
B. (2, 1) và (-2, -3). D. (1, 2) và (-2, -3).

b. Tìm m để hệ có hai cặp nghiệm phân biệt (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thỏa mãn $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. Vô nghiệm.

Câu IV. (3 điểm): Cho $\triangle ABC$ vuông, có cạnh huyền $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm

BC . Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

a. Tính độ dài AB .

- A. $a\sqrt{2}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{2}$. D. $2a\sqrt{3}$.

b. Tính độ dài AC .

- A. $\frac{a}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu V. (1 điểm): Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của tam giác ABO và CDO . I, J là trung điểm của AD và BC . Chứng minh rằng $HK \perp IJ$.

ĐỀ SỐ 24

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hai hàm số:

$$f(x) = (m^2 + 1)x - 4 \text{ và } g(x) = mx + 2, \text{ với } m \neq 0.$$

Xét sự biến thiên của các hàm số:

a. (0,5 điểm): $y = f(x)$.

- A. Đồng biến. B. Nghịch biến. C. Không đơn điệu.

b. (0,5 điểm): $y = f(x) + g(x)$.

- A. Đồng biến. B. Nghịch biến. C. Không đơn điệu.

c. (0,5 điểm): $y = f(x) - g(x)$.

- A. Đồng biến. B. Nghịch biến. C. Không đơn điệu.

d. (0,5 điểm): $y = g(x) - f(x)$.

- A. Đồng biến. B. Nghịch biến. C. Không đơn điệu.

Câu II. (2 điểm): Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$mx^2 + 2(m - 1)x - 2 = 0.$$

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m = 1$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 20$.

A. (1, 2) và (2, 1).

C. (2, 5) và (5, 2).

B. (1, 5) và (5, 1).

D. (3, 5) và (5, 3).

b. Xác định m để hệ vô nghiệm

A. $m < 1$.

B. $m < 8$.

C. $m < 18$.

D. Vô nghiệm.

Câu IV. (3 điểm): Cho $\triangle ABC$, trọng tâm G . Lấy các điểm I, J sao cho:

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0},$$

$$2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}.$$

a. Xác định vị trí của điểm J .

A. J là trung điểm của AI .

C. J là trung điểm của CI .

B. J là trung điểm của BI .

D. J là trung điểm của GI .

b. Chứng minh rằng M, N, J thẳng hàng, với M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và BC .

c. Gọi E là điểm thuộc AB thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

A. $k = \frac{1}{7}$.

B. $k = \frac{3}{7}$.

C. $k = \frac{5}{7}$.

D. Vô nghiệm.

Câu V. (1 điểm): Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a, BC = b$. Tính $BD^2 + AC^2$ theo a và b .

A. $a^2 + b^2$.

B. $2(a^2 + b^2)$.

C. $3(a^2 + b^2)$.

D. $4(a^2 + b^2)$.

ĐỀ SỐ 25

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = f(x) = x^2.$$

a. (1 điểm): Vẽ đồ thị hàm số.

b. (1 điểm): Tìm phép tịnh tiến theo trục Ox để suy ra đồ thị của hàm số

$$y = x^2 - 6x + 9.$$

A. Tịnh tiến Ox sang trái 3 đơn vị.

C. Tịnh tiến Ox sang trái 6 đơn vị.

B. Tịnh tiến Ox sang phải 3 đơn vị.

D. Tịnh tiến Ox sang phải 6 đơn vị.

Câu II. (3 điểm): Giả sử phương trình:

$$x^2 - ax + 1 = 0$$

có hai nghiệm x_1, x_2 . Kí hiệu $S_n = x_1^n + x_2^n$.

a. (1 điểm): Tính S_2 .

A. $S_2 = a^2 - 2$.

B. $S_2 = a^2 - 1$.

C. $S_2 = a^2 + 1$.

D. $S_2 = a^2 + 2$.

b. (1 điểm): Tính S_7 .

A. $S_7 = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a$.

C. $S_7 = a^7 - 3a^5 + 9a^3 - 3a$.

B. $S_7 = a^7 - 5a^5 + 12a^3 - 5a$.

D. $S_7 = a^7 - 3a^5 + 6a^3 - 3a$.

c. (1 điểm): Tìm đa thức bậc 7 có hệ số nguyên nhận $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}$ là nghiệm.

A. $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - 7 = 0$. C. $x^7 - 3x^5 + 9x^3 - 3x - 7 = 0$.

B. $x^7 - 5x^5 + 12x^3 - 5x - 7 = 0$. D. $x^7 - 3x^5 + 6x^3 - 3x - 7 = 0$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 \\ x + ay - a = 0 \end{cases}$$

a. Tìm a để hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

A. $0 < a < \frac{4}{3}$. B. $0 < a < \frac{1}{3}$. C. $a > \frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{3} < a < \frac{4}{3}$.

b. Gọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là các nghiệm của hệ đã cho. Chứng minh rằng:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1.$$

Câu IV. (2 điểm): Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB, biết rằng:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4, \overline{CA} \cdot \overline{CB} = 9, \overline{CB} \cdot \overline{CD} = 6.$$

a. Tính độ dài AB.

A. 2. B. 4. C. 6. D. 7.

b. Tính độ dài BC.

A. 2. B. 3. C. 5. D. 6.

c. Tính độ dài AD.

A. 3. B. 2. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

d. Tính độ dài CD.

A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

e. Gọi EF là đường trung bình của hình thang, tính độ dài hình chiếu của EF lên BD.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu V. (1 điểm): Tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $AB = a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$. C. $\frac{3a\sqrt{21}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

ĐỀ SỐ 28

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hai hàm số (P_1) và (P_2) , biết:

$$(P_1): y = -x^2 + 2x + 3 \text{ và } (P_2): y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3.$$

a. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và đồ thị hai hàm số (P_1) và (P_2) trên cùng một hệ trục tọa độ.

b. (1 điểm): Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị vừa vẽ.

A. $-5 \leq m \leq 4$. B. $-4 \leq m \leq 4$. C. $-4 \leq m \leq 5$. D. $-5 \leq m \leq 5$.

Câu II. (2 điểm): Giải phương trình:

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2.$$

- A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = 1$ D. $x = \sqrt{2}$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m & (*) \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$$

a. Giải hệ phương trình với $m = 0$.

- A. $(0, 0)$ và $(1, 1)$. C. $(1, 1)$ và $(2, 2)$.
B. $(0, 0)$ và $(2, 2)$. D. $(3, 3)$ và $(2, 2)$.

b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 4$.

Câu IV. (3 điểm): Cho tứ giác ABCD. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overline{AM} = k \cdot \overline{AB}$ và $\overline{DN} = k \cdot \overline{DC}$.

a. Biểu diễn $\overline{MN}$ theo $\overline{AD}$ và $\overline{BC}$.

- A. $\overline{MN} = (1 + k) \cdot \overline{AD} + k \cdot \overline{BC}$. C. $\overline{MN} = k \cdot \overline{AD} + (1 + k) \cdot \overline{BC}$.
B. $\overline{MN} = (1 - k) \cdot \overline{AD} + k \cdot \overline{BC}$. D. $\overline{MN} = k \cdot \overline{AD} + (1 - k) \cdot \overline{BC}$.

b. Gọi các điểm E, F, I theo thứ tự thuộc AD, BC và MN sao cho $\overline{AE} = l \cdot \overline{AD}$, $\overline{BF} = l \cdot \overline{BC}$ và $\overline{MI} = l \cdot \overline{MN}$. Chứng minh rằng E, F, I thẳng hàng.

Câu V. (1 điểm): Chứng minh rằng trong tam giác ba đường cao đồng quy.

ĐỀ SỐ 27

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm): Cho hàm số:

$$y = f(x) = 2x^2 + x$$

a. (1 điểm): Vẽ đồ thị hàm số.

b. (1 điểm): Tìm phép tịnh tiến theo trục Ox để suy ra đồ thị của hàm số $y = 2x^2 + 9x + 10$.

- A. Tịnh tiến Ox sang trái 2 đơn vị. C. Tịnh tiến Ox sang trái 6 đơn vị.
B. Tịnh tiến Ox sang phải 2 đơn vị. D. Tịnh tiến Ox sang phải 6 đơn vị.

Câu II. (2 điểm): Giải phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3.$$

- A. $x = 0, x = 1$. B. $x = 1, x = 2$. C. $x = 2, x = 3$. D. $x = 0, x = 3$.

Câu III. (2 điểm): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y-2} = 7 \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{y+5} = 7 \end{cases}$$

- A. $(11, 11)$. B. $(3, 3)$. C. $(11, 3)$. D. $(3, 11)$.

Câu IV. (3 điểm): Cho ΔABC , gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$.

a. Biểu diễn $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} - \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} - \frac{3}{5} \overrightarrow{AC}$.

b. Biểu diễn $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{3} \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} - \frac{5}{3} \overrightarrow{AC}$.

c. Gọi G là trọng tâm ΔABC , biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48} \overrightarrow{AI} + \frac{1}{16} \overrightarrow{AJ}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AI} + \frac{35}{48} \overrightarrow{AJ}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48} \overrightarrow{AI} - \frac{1}{16} \overrightarrow{AJ}$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{16} \overrightarrow{AI} - \frac{35}{48} \overrightarrow{AJ}$.

Câu V. (1 điểm): Cho tứ giác lồi $ABCD$, biết $AC = a$, $BD = b$ và góc xen giữa hai đường chéo bằng α . Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

A. $\frac{1}{2} ab \cdot \sin \alpha$.

B. $\frac{1}{2} ab \cdot \cos \alpha$.

C. $\frac{1}{2} ab \cdot \tan \alpha$.

D. $\frac{1}{2} ab \cdot \cot \alpha$.

ĐỀ SỐ 28

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (4 điểm): Cho hàm số:

$$(P_m): y = (1 + m)x^2 - 2(m - 1)x + m - 3.$$

a. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên và đồ thị hàm số với $m = 0$ (tương ứng là (P_0)). Bằng đồ thị tìm x để $y \geq 0$, $y \leq 0$.

A. $y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq -1$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -1$.

B. $y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

C. $y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

D. $y \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ hoặc $x \geq 3$ và $y \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

b. (1 điểm): Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua đỉnh của (P_0) và giao điểm của (P_0) với Oy .

A. $(d): x + y + 3 = 0$.

C. $(d): x + y - 3 = 0$.

B. $(d): x - y - 3 = 0$.

D. $(d): x - y + 3 = 0$.

c. (1 điểm): Xác định m để (P_m) là Parabol. Tìm quỹ tích đỉnh của Parabol (P_m) khi m thay đổi.

A. $m \neq -1$ và quỹ tích đỉnh là đường thẳng $(\Delta): 2x + y - 2 = 0$.

B. $m \neq -1$ và quỹ tích đỉnh là đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 2 = 0$.

C. $m \neq 1$ và quỹ tích đỉnh là đường thẳng $(\Delta): 2x + y - 2 = 0$.

D. $m \neq 1$ và quỹ tích đỉnh là đường thẳng $(\Delta): x + 2y - 2 = 0$.

d. (1 điểm): Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm cố định đó.

- A. $M(0, 1)$. B. $M(1, 0)$. C. $M(1, 1)$. D. $M(0, 0)$.

Câu II. (1 điểm): Giải phương trình:

$$(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} + 3 = 0.$$

- A. $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 + \sqrt{5}$. C. $x = 1 + \sqrt{13}$ và $x = 1 + \sqrt{5}$.
B. $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$. D. $x = 1 + \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$.

Câu III (2 điểm): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y + 1} + x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2 + x + y + 1} - x + \sqrt{y^2 + x + y + 1} - y = 2 \end{cases}$$

- A. $(4, 4)$. B. $(1, 1)$. C. $(4, 1)$. D. $(1, 4)$.

Câu IV (2 điểm): Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$.

- a. Xác định điểm K sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.
A. K là trung điểm AB. C. K là trung điểm AC.
B. K là trung điểm BC. D. K là trung điểm MN.
- b. Xác định điểm D sao cho $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
A. D là trung điểm AB. C. D là trung điểm AC.
B. D là trung điểm BC. D. D là trung điểm MN.

Câu V. (1 điểm): Cho hai phương trình:

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ và } x^2 + cx + d = 0.$$

Biết rằng $ac \geq 2(b + d)$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm.

ĐỀ SỐ 29

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm):

- a. (1 điểm): Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

- b. (1 điểm): Lập phương trình Parabol (P), biết rằng (P) đi qua ba điểm $A(1, 1)$, $E(-1, 9)$, $C(0, 3)$.

- A. $y = x^2 - 4x + 3$. C. $y = x^2 - 4x + 1$.
B. $y = 2x^2 - x + 3$. D. $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Câu II. (2 điểm): Giải phương trình:

$$2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0.$$

- A. $x = 1 \pm \sqrt{2}$. B. $x = 1 \pm \sqrt{3}$. C. $x = 1 \pm \sqrt{5}$. D. $x = 1 \pm \sqrt{7}$.

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + m \quad (*) \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$$

- a. Giải hệ phương trình với $m = 0$.
- A. $(0, 0)$ và $(1, 1)$. C. $(1, 1)$ và $(2, 2)$.
 B. $(0, 0)$ và $(2, 2)$. D. $(3, 3)$ và $(2, 2)$.
- b. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.
- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Câu IV. (3 điểm): Hình vuông ABCD tâm O cạnh bằng a , gọi M là trung điểm AB. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác sau:

- a. $\triangle MCD$.
- A. $\frac{5a}{8}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{3a}{8}$. D. $\frac{a}{4}$.
- b. $\triangle MBD$.
- A. $\frac{a\sqrt{10}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{6}$.
- c. $\triangle MOC$.
- A. $\frac{a\sqrt{10}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{10}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{6}$.

Câu V. (1 điểm): Cho hình bình hành ABCD, biết rằng với mọi điểm M luôn có:

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

ĐỀ SỐ 30

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm):

- a. (1 điểm): Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

$$y = \sqrt[3]{x-3} - \sqrt[3]{x+3}.$$

- A. Chẵn. B. Lẻ. C. Không chẵn, không lẻ.
- b. (1 điểm): Lập phương trình Parabol (P), biết rằng (P) có đỉnh $S(1, 5)$ và đi qua điểm $A(-1, 1)$.
- A. $y = -x^2 + 2x + 4$. C. $y = -x^2 + x + 4$.
 B. $y = x^2 + 2x + 4$. D. $y = x^2 + x + 4$.

Câu II. (2 điểm): Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$mx^2 - 2(m+1)x + m + 2 = 0.$$

- A. $m < 1$. B. $m < 4$. C. $m > 2$. D. Mọi m .

Câu III. (2 điểm): Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

- A. $m = 1$ hoặc $m = -1$. C. $m = 3$ hoặc $m = -2$.
 B. $m = 1$ hoặc $m = -2$. D. $m = 3$ hoặc $m = -1$.

Câu IV. (3 điểm): Cho tứ giác ABCD. M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho các đẳng thức vector sau thoả mãn với mọi điểm M.

a. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MI}$.

A. $k = 1$. B. $k = 2$. C. $k = 3$. D. $k = 4$.

b. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{MJ}$.

A. $k = 1$. B. $k = 3$. C. $k = 4$. D. $k = 6$.

c. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MK}$.

A. $k = 4$. B. $k = 6$. C. $k = 8$. D. $k = 11$.

Câu V. (1 điểm): Tìm các số nguyên a để phương trình sau có nghiệm nguyên:

$$x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0$$

A. $a = -44$ và $a = 10$.

C. $a = -24$ và $a = 10$.

B. $a = -44$ và $a = 40$.

D. $a = -24$ và $a = 40$.

D. 10 ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC KÌ II

ĐỀ SỐ 31

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}}{\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}}, \text{ với } -\frac{\pi}{4} < x < 0.$$

A. $\tan x$. B. $\cot x$. C. $\sin x$. D. $\cos x$.

b. Tìm a sao cho biểu thức sau không phụ thuộc x :

$$A = \cos 2x - a \sin^2 x + 2 \cos^2 x$$

A. $a = -4$. B. $a = -2$. C. $a = 0$. D. $a = 2$.

Câu II. (3 điểm): Cho bất phương trình:

$$x^2 + 4x + 3 + m \leq 0.$$

Với giá trị nào của m thì.

a. Bất phương trình vô nghiệm.

A. $m > 1$. B. $m < 2$. C. $m > 0$. D. $1 < m < 2$.

b. Bất phương trình có đúng một nghiệm.

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 8$.

c. Bất phương trình có nghiệm là một đoạn có độ dài bằng 2.

A. $m = -3$. B. $m = 2$. C. $m = 6$. D. $m = 11$.

Câu III. (3 điểm): Cho điểm $M(6, 2)$ và đường tròn (C) có phương trình:

$$(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

a. Xác định tâm và tính bán kính của đường tròn (C).

A. $I(1, 2)$ và $R = \sqrt{5}$. C. $I(-1, -2)$ và $R = \sqrt{5}$.

B. $I(1, 2)$ và $R = 5$. D. $I(-1, -2)$ và $R = 5$.

b. Chứng tỏ rằng điểm M nằm ngoài (C).

c. Lập phương trình đường thẳng (d) đi qua M và cắt đường tròn (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

A. $(d_1): 3x - y = 0$ và $(d_2): x + 12y + 12 = 0$.

B. $(d_1): 3x - y = 0$ và $(d_2): x + 12y - 12 = 0$.

C. $(d_1): x - 3y = 0$ và $(d_2): x + 3y + 12 = 0$.

D. $(d_1): x - 3y = 0$ và $(d_2): x + 3y - 12 = 0$.

Câu IV. (2 điểm): Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

ĐỀ SỐ 32

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = \sin \frac{5a}{2} - 5 \cos^3 a \cdot \sin \frac{a}{2}, \text{ với } a \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

- b. Xác định $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ để biểu thức sau không phụ thuộc vào x :

$$A = \cos x + \cos(x + a) + \dots + \cos(x + 5a).$$

A. $a = \frac{\pi}{6}$. B. $a = \frac{\pi}{4}$. C. $a = \frac{\pi}{3}$. D. $a = \frac{\pi}{2}$.

Câu II. (2 điểm):

- a. Xác định m sao cho hai bất phương trình sau tương đương:

$$(m - 1)x - m + 3 > 0 \text{ và } (m + 1)x - m + 2 > 0.$$

A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = 5$.

- b. Cho tam thức:

$$f(x) = mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3.$$

Xác định m để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m < 1$. B. $m > 2$. C. Mọi m . D. Vô nghiệm.

Câu III. (3 điểm): Cho ΔABC , biết $A(1, 3)$ và hai trung tuyến có phương trình là:

$$x - 2y + 1 = 0, y - 1 = 0.$$

Lập phương trình các cạnh:

- a. AB.

A. (AB): $x + 2y - 7 = 0$.

C. (AB): $2x + y - 7 = 0$.

B. (AB): $x + 2y + 7 = 0$.

D. (AB): $2x + y + 7 = 0$.

- b. AC.

A. (AC): $x - y - 2 = 0$.

C. (AC): $2x - 3y - 2 = 0$.

B. (AC): $x - y + 2 = 0$.

D. (AC): $2x - 3y + 2 = 0$.

- c. BC.

A. (BC): $4x - y - 1 = 0$.

C. (BC): $x - 4y - 1 = 0$.

B. (BC): $4x - y + 1 = 0$.

D. (BC): $x - 4y + 1 = 0$.

Câu IV. (2 điểm): Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta luôn có:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{b^2 + c^2}{b + c} + \frac{c^2 + a^2}{c + a} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}.$$

ĐỀ SỐ 33

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (3 điểm):

- a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = \sin^3 a + \cos^3 a - \cos 2a.$$

- b. Rút gọn biểu thức:

$$A = 4[\sin^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4})] - 3$$

từ đó suy ra giá trị của A tại $x = \frac{\pi}{8}$.

A. $-2\sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu II. (3 điểm):

a. Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm:

$$m^2x + 4m - 3 < x + m^2$$

A. $m = 0$. B. $m < 0$. C. $m = 1$. D. $m > 1$.

b. Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$mx^2 - 4(m+1)x + 3m + 13 = 0.$$

A. $m \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$. C. $m \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

B. $m \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$. D. $m \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Câu III. (2 điểm): Cho điểm $M(4, 1)$. Đường thẳng (d) luôn đi qua M cắt Ox , Oy theo thứ tự tại $A(a, 0)$, $B(0, b)$ với $a, b > 0$. Lập phương trình đường thẳng (d) sao cho:

a. Diện tích ΔOAB nhỏ nhất.

A. $(d): 4x + y + 8 = 0$. C. $(d): x + 4y + 8 = 0$.

B. $(d): 4x + y - 8 = 0$. D. $(d): x + 4y - 8 = 0$.

b. $OA + OB$ nhỏ nhất.

A. $(d): x + 2y + 6 = 0$. C. $(d): 2x + y + 6 = 0$.

B. $(d): x + 2y - 6 = 0$. D. $(d): 2x + y - 6 = 0$.

c. $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

A. $(d): 2x + 4y - 17 = 0$. C. $(d): 4x + 2y - 17 = 0$.

B. $(d): 2x + 4y + 17 = 0$. D. $(d): 4x + 2y + 17 = 0$.

Câu IV. (2 điểm): Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng với bất kì số nguyên $n > 1$ thì:

$$a^n b(a-b) + b^n c(b-c) + c^n a(c-a) \geq 0.$$

ĐỀ SỐ 34

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 4\sin 2a - 3\cos 2a - 3(4\sin a - 1) - 6\sin^2 a.$$

b. Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ lần c.n}}, \text{ với } 0 \leq x \leq \pi.$$

từ đó suy ra giá trị của A tại $x = 0$.

A. 2. B. 1. C. 0. D. $\frac{1}{2}$

Câu II. (2 điểm):

a. Giải bất phương trình:

$$2x^3 + x^2 - 5x + 2 > 0.$$

A. $x < -2$. B. $x < 3$. C. $x > -2$. D. $x > 3$.

b. Giải bất phương trình:

$$\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} > 2x+2$$

- A. $-2 < x < 0$. B. $-2 < x < 1$. C. $\frac{1}{2} < x < 1$. D. $-\frac{1}{2} < x < 0$.

Câu III. (2 điểm): Cho điểm $I(1, 1)$ và đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): x - 2y + 2 = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua I .

- A. $(d_1): 2x - y = 0$. C. $(d_1): 2x - y + 12 = 0$.
B. $(d_1): x - 2y = 0$. D. $(d_1): x - 2y + 12 = 0$.

Câu IV. (2 điểm): Cho hai điểm $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$ và điểm $A(0, 3)$.

a. Lập phương trình chính tắc của Elíp (E) đi qua điểm A và có 2 tiêu điểm là F_1, F_2 .

- A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. C. $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
B. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. D. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

b. Tìm tọa độ điểm M trên (E) sao cho $MF_1 = 9MF_2$.

- A. $M(5, 2)$. B. $M(5, 0)$. C. $M(2, 5)$. D. $M(0, 5)$.

Câu V. (1 điểm): Giải bất phương trình:

$$|2x+1| \leq |2x-1| + 2.$$

ĐỀ SỐ 35

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (3 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 5\sin 3a - 3\sin 5a.$$

b. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \sin^6 \frac{\pi}{48} + \cos^6 \frac{\pi}{48}.$$

- A. $\frac{20-3\sqrt{2}}{32}$. C. $\frac{20-3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{32}$.
B. $\frac{20+3\sqrt{6}}{32}$. D. $\frac{20+3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{32}$.

Câu II. (3 điểm):

a. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 4x+3 > 0 \\ 2x^2+5x+3 \leq 0 \end{cases}$$

- A. $-\frac{4}{3} < x \leq -1$. B. $-\frac{4}{3} < x < -1$. C. $-1 < x \leq \frac{4}{3}$. D. $-1 < x < \frac{4}{3}$.

b. Giải phương trình:

$$|x^2 - x| + |2x - 4| = 3.$$

- A. $x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{29} - 1}{2}$. C. $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{29} + 1}{2}$..
 B. $x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{29} + 1}{2}$. D. $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{29} - 1}{2}$.

Câu III. (2 điểm):

a. Cho hai đường thẳng (d) và (Δ) có phương trình:

$$(d): 4x - y + 3 = 0 \text{ và } (\Delta): x - y = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng (d_1) đối xứng với đường thẳng (d) qua (Δ).

- A. (d_1): $4x - y - 3 = 0$. C. (d_1): $x - 4y - 3 = 0$.
 B. (d_1): $4x - y + 3 = 0$. D. (d_1): $x - 4y + 3 = 0$.
 b. Lập phương trình chính tắc của Elíp (E) có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(\frac{20}{\sqrt{41}}, \frac{20}{\sqrt{41}})$.

- A. (E_1): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.
 B. (E_1): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.
 C. (E_1): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.
 D. (E_1): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ và (E_2): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu IV. (2 điểm): Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{2x^2 - 10x + 16} \geq 3 - x.$$

- A. $x = 2$ và $x = 3$. C. $x = 3$ và $x = 5$.
 B. $x = 2$ và $x = 5$. D. $x = 1$ và $x = 3$.

ĐỀ SỐ 36

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 2\sin a + \cot a - 2\sin 2a - 1.$$

b. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^2 73^\circ + \sin^2 47^\circ - \sin 73^\circ \cdot \sin 47^\circ$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. 2.

Câu II. (3 điểm):

a. Xác định m sao cho với mọi x, ta đều có:

$$6 < \frac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 9.$$

- A. $-1 < m < 0$. B. $2 < m < 6$. C. $m > 6$. D. $-3 < m < 6$.

b. Tìm m để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0 \\ x^2 - 3x - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

A. $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

C. $m \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

B. $m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

D. $m \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

Câu III. (3 điểm): Cho Hyperbol (H) có phương trình:

$$(H): 9x^2 - 16y^2 = 144.$$

a. Chuyển phương trình của (H) về dạng chính tắc.

A. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$.

C. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

B. (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$.

D. (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

b. Viết phương trình Hyperbol (H_1) liên hợp của (H).

A. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

C. (H): $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$.

B. (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

D. (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$.

c. Lập phương trình đường tròn (C) đường kính F_1F_2 .

A. $x^2 + y^2 = 25$. B. $x^2 + y^2 = 2$. C. $x^2 + y^2 = 5$. D. $x^2 + y^2 = 10$.

d. Viết phương trình chính tắc Elíp (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H).

A. (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

C. (E): $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1$.

B. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

D. (E): $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{40} = 1$.

Câu IV. (2 điểm): Trong tất cả các nghiệm (x, y) của phương trình $2x + 3y = 1$ hãy chỉ ra nghiệm có tổng $3x^2 + 2y^2$ nhỏ nhất.

A. $(\frac{9}{35}, \frac{4}{35})$. B. $(\frac{4}{35}, \frac{9}{35})$. C. $(\frac{4}{3}, \frac{9}{5})$. D. $(\frac{9}{5}, \frac{4}{3})$.

ĐỀ SỐ 37

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = \sin a \cdot \cos a - 2(\tan a + \cos^2 a) + 4.$$

b. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \tan^6 \frac{\pi}{9} - 33 \tan^4 \frac{\pi}{9} + 27 \tan^2 \frac{\pi}{9} - 3.$$

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 9.

Câu II. (3 điểm):

- a. Với giá trị nào của m thì hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 \\ mx + m - 1 \leq 0 \end{cases}$$

E. $m = -\frac{3}{2}$. F. $m = -\frac{1}{2}$. G. $m = \frac{1}{2}$. H. $m = \frac{3}{2}$.

- b. Giải bất phương trình:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4x^2}}{x} < 3.$$

A. $T = [-2, 2] \setminus \{0\}$.

C. $T = [-1, 1] \setminus \{0\}$.

B. $T = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

D. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Câu III. (3 điểm): Cho Elíp (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } 0 < b < a$$

Hai tiêu điểm F_1, F_2 . Đường thẳng di động (d) luôn đi qua F_2 cắt (E) tại P, Q. Đặt $(Ox, F_2P) = \alpha, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

- a. Tính độ dài F_2P, F_2Q theo a, b, α .

A. $F_2P = \frac{b^2}{a + c \cos \alpha}$ và $F_2Q = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha}$.

B. $F_2P = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha}$ và $F_2Q = \frac{b^2}{a + c \cos \alpha}$.

C. $F_2P = \frac{b^2}{a + c \sin \alpha}$ và $F_2Q = \frac{b^2}{a - c \sin \alpha}$.

D. $F_2P = \frac{b^2}{a - c \sin \alpha}$ và $F_2Q = \frac{b^2}{a + c \sin \alpha}$.

- b. Tính giá trị của $\frac{1}{F_2P} + \frac{1}{F_2Q}$.

A. $\frac{a}{b^2}$.

B. $\frac{2a}{b^2}$.

C. $\frac{3a}{b^2}$.

D. $\frac{4a}{b^2}$.

- c. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đoạn PQ.

A. $PQ_{\min} = a$ và $PQ_{\max} = \frac{b^2}{a}$.

C. $PQ_{\min} = 2a$ và $PQ_{\max} = \frac{2b^2}{a}$.

B. $PQ_{\min} = \frac{b^2}{a}$ và $PQ_{\max} = a$.

D. $PQ_{\min} = \frac{2b^2}{a}$ và $PQ_{\max} = 2a$.

Câu IV. (2 điểm): Hai số dương x, y thỏa mãn $3x + 2y = 6xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $x + y$.

A. $\frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}$.

B. $\frac{3 + 2\sqrt{6}}{6}$.

C. $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}$.

D. $\frac{7 + 2\sqrt{6}}{6}$.

ĐỀ SỐ 38

(Thời gian 120 phút)

Câu I. 2 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tổng:

$$A = 4\cos a \cdot \cos 2a \cdot \sin \frac{5a}{2}.$$

b. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65}.$$

A. $\frac{1}{64}$ B. $\frac{1}{32}$ C. $\frac{1}{16}$ D. $\frac{1}{8}$.

Câu II. (3 điểm):a. Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 3x - 2 > 5 - 4x \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}$$

A. $m < -5$. B. $m < -2$. C. $m > -5$. D. $m > -2$.

b. Giải bất phương trình:

$$x + 1 \geq \sqrt{2(x^2 - 1)}.$$

A. $T = [1, 3]$. C. $T = (1, 3)$.
B. $T = [1, 3] \cup \{-1\}$. D. $T = (1, 3) \cup \{-1\}$.

Câu III. (3 điểm): Cho điểm $M(1, 1)$ và Elíp (E) có phương trình:

$$(E): 4x^2 + 9y^2 = 36.$$

a. Tìm tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, tính tâm sai của Elíp đó.

A. $A_1(-3, 0), A_2(3, 0), B_1(0, -2), B_2(0, 2); F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0); e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

B. $A_1(-3, 0), A_2(3, 0), B_1(0, -2), B_2(0, 2); F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0); e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $A_1(-2, 0), A_2(2, 0), B_1(0, -3), B_2(0, 3); F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0); e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $A_1(-2, 0), A_2(2, 0), B_1(0, -3), B_2(0, 3); F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0); e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng (d) bất kì luôn đi qua điểm M với Elíp (E).

A. (d) không cắt (E). C. (d) luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.
B. (d) tiếp xúc với (E).

c. Lập phương trình đường thẳng (d) qua M và cắt Elíp trên tại hai điểm A, B sao cho $MA = MB$.

A. (d): $4x + 9y + 13 = 0$. C. (d): $9x + 4y + 13 = 0$.
B. (d): $4x + 9y - 13 = 0$. D. (d): $9x + 4y - 13 = 0$.

Câu IV. (2 điểm): Cho các số không âm x, y thoả mãn $x^3 + y^3 = 2$. Chứng minh rằng:
 $x^2 + y^2 \leq 2$.

ĐỀ SỐ 39

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm):

a. Biến đổi biểu thức sau thành tổng:

$$A = 8\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2a \cdot \sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right).$$

b. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19}.$$

A. $\frac{1}{16}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu II. (3 điểm):

a. Giải hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x + 2 < 6 \\ 3x - 2 \leq 2x + 3 \end{cases}$$

A. $[-1, 2)$.

B. $(-1, 2)$.

C. $[-2, 3)$.

D. $(-2, 3)$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + m = 0 \\ x^3 - 4x^2 + 4x + m - 10 < 0 \end{cases}$$

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Câu III. (2 điểm): Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

$$(C_1): x^2 + y^2 = 4 \text{ và } (C_2): x^2 + y^2 = 1.$$

Các điểm A, B lần lượt di động trên (C_1) và (C_2) sao cho Ox là phân giác của góc AOB. Gọi M là trung điểm AB. Lập phương trình quỹ tích của M.

A. (E): $\frac{x^2}{1/4} + \frac{y^2}{9/4} = 1$.

C. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

B. (E): $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{1/4} = 1$.

D. (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Câu IV. (2 điểm): Xét điểm $M(t)$ có tọa độ cho bởi:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ y = \sqrt{3} \tan t \end{cases}$$

a. Chứng minh rằng khi t thay đổi, điểm $M(t)$ vạch trên một nhánh của Hyperbol (H). Xác định tọa độ tiêu điểm của Hyperbol đó.

A. $F_1(-3, 0)$ và $F_2(3, 0)$.

C. $F_1(-5, 0)$ và $F_2(5, 0)$.

B. $F_1(-2, 0)$ và $F_2(2, 0)$.

D. $F_1(-1, 0)$ và $F_2(1, 0)$.

- b. Tìm điều kiện cần và đủ để đường thẳng nối 2 điểm phân biệt $M(t_1)$, $M(t_2)$ đi qua một tiêu điểm của (H).

A. $\tan \frac{t_1}{2} \cdot \tan \frac{t_2}{2} = -\frac{1}{3}$.

C. $\tan \frac{t_1}{2} \cdot \tan \frac{t_2}{2} = -\frac{1}{2}$.

B. $\tan \frac{t_1}{2} \cdot \tan \frac{t_2}{2} = \frac{1}{3}$.

D. $\tan \frac{t_1}{2} \cdot \tan \frac{t_2}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu V. (1 điểm): Chứng minh rằng với mọi số thực x, y , luôn có:

$$(x^3 + y^3)^2 \leq (x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

ĐỀ SỐ 40

(Thời gian 120 phút)

Câu I. (2 điểm):

- a. Biến đổi biểu thức sau thành tích:

$$A = 2\cos \frac{a}{2} \cdot \cos a \cdot \cos \frac{3a}{2} - 2\sin \frac{a}{2} \cdot \sin a \cdot \sin \frac{3a}{2} - 1.$$

- b. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{5}} - 1.$$

A. -1.

B. -2.

C. -3.

D. -4.

Câu II. (1 điểm): Giải và biện luận bất phương trình:

$$mx + 1 \leq m^2 - x.$$

Câu III. (2 điểm): Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 - (3m - 1)x + 2m^2 - m < 0 \\ x^2 + m^2 = 4 \end{cases}$$

- a. Tìm m để hệ có nghiệm.

A. $1 - \sqrt{2} < m < 2$.

C. $-\sqrt{2} < m < 3$.

B. $-\sqrt{2} < m < 2$.

D. $2 - \sqrt{2} < m < 2$.

- b. Tìm m để hệ có đúng một nghiệm.

A. $1 - \sqrt{2} < m \leq 0$ hoặc $\sqrt{2} \leq m < 2$.

B. $2 - \sqrt{2} < m \leq 0$ hoặc $\sqrt{2} \leq m < 2$.

C. $-\sqrt{2} < m \leq 0$ hoặc $\sqrt{2} \leq m < 2$.

D. $-\sqrt{2} < m \leq 0$ hoặc $\sqrt{2} \leq m < 2 + \sqrt{2}$.

- c. Tìm m để hệ có hai nghiệm phân biệt

A. $0 < m < 1$. B. $0 < m < 2$. C. $0 < m < 4$. D. $0 < m < \sqrt{2}$.

Câu IV. (2 điểm): Cho hai đường thẳng:

$$(d_1): 2x - y + 1 = 0 \text{ và } (d_2): x - 2y - 3 = 0$$

Lập phương trình đường thẳng (Δ) đi qua giao điểm của (d_1) và (d_2) đồng thời cắt trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau.

A. $(\Delta_1): 3x - 3y - 2 = 0$.

C. $(\Delta_1): 7x - 5y = 0$.

B. $(\Delta_2): x + y + 4 = 0$.

D. Cả (Δ_1) , (Δ_2) , (Δ_3) đều đúng.

Câu V. (2 điểm): Tìm tâm sai của Elíp biết:

a. Mỗi tiêu điểm nhìn trực trục nhỏ dưới một góc 2α .

- A. $\sin\alpha$. B. $\cos\alpha$. C. $\tan\alpha$. D. $\cot\alpha$.

b. Khoảng cách giữa hai đỉnh trên hai trục bằng k lần ($k > \frac{1}{2}$) tiêu cự.

- A. $\frac{1}{\sqrt{4k^2 + 1}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{k^2 + 4}}$. C. $\sqrt{\frac{2}{k^2 + 4}}$. D. $\sqrt{\frac{2}{4k^2 + 1}}$.

c. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng k lần tiêu cự.

- A. $\frac{1}{\sqrt{k}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{k}}$. C. $\frac{3}{\sqrt{k}}$. D. $\frac{4}{\sqrt{k}}$.

Câu VI. (2 điểm): Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2 - 2x + 2y} = x - 1 \\ \sqrt{x - y} + \sqrt{x - y + 1} = 1 \end{cases}$$

- A. (2, 1). B. (1, 2). C. (2, 2). D. (2, 1).

PHẦN II

HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

ĐỀ SỐ I

Câu I.

- Là mệnh đề sai.
- Là mệnh đề đúng.
- Đó là câu khẳng định nhưng chưa phải là một mệnh đề vì ta chưa thể xác định được tính đúng sai của nó (mệnh đề chứa biến).
- Đó không là câu khẳng định nên không phải là một mệnh đề.

Câu II.

Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: (Chứng minh trực tiếp): Ta biến đổi tương đương bất đẳng thức về dạng:

$$(a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, ta luôn có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với a, b là hai số dương.

Cách 2: (Chứng minh bằng phản chứng): Giả sử trái lại, tồn tại hai số dương a và b sao cho:

$$a + b < 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0, \text{ mâu thuẫn.}$$

Vậy, ta luôn có $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ với a, b là hai số dương.

Câu III.

a. Ta có:

$$\begin{cases} x^2 > 4 \\ x^2 < 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < \sqrt{20} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Vậy, ta được $A = \{3, 4\}$ và từ đó suy ra:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, A\}$$

b. Với x bất kỳ ta có:

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \in A \setminus C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Vậy, ta được $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

c. Ta lần lượt có:

- Sai. ▪ Đúng. ▪ Sai. ▪ Đúng.

Câu IV.

a. Giả sử $a = 6,3 + u$, $b = 10 + v$, $c = 15 + t$.

Ta có:

$$P = a + b + c = 31,3 + u + v + t$$

Theo giả thiết:

$$-0,5 \leq u + v + t \leq 0,5$$

Do đó, $P = 31,3\text{cm} \pm 0,5\text{cm}$.

b. Ta có:

$$1,496 \cdot 10^8 (\text{km}) = 1,406 \cdot 10^{11} (\text{m})$$

Thời gian trạm vũ trụ đi được một đơn vị thiên văn là:

$$\frac{1,496 \cdot 10^{11}}{15 \cdot 10^4} = 9,9773 \cdot 10^6 (\text{s}).$$

ĐỀ SỐ 2

Câu I.

- Vì mệnh đề $(2 > 1)$ đúng và mệnh đề $(1 < 3)$ sai nên $(2 > 1) \Rightarrow (1 < 3)$ là mệnh đề sai.
- Vì mệnh đề $(2 > 3)$ là sai nên mệnh đề $(2 > 3) \Rightarrow (3 + 1 < 3)$ đúng.
- Vì mệnh đề $(3 - 2 = 1)$ là đúng và mệnh đề $(1 + 1 = 3)$ sai nên mệnh đề $((3 - 2 = 1) \Leftrightarrow (1 + 1 = 3))$ sai.
- Vì cả hai mệnh đề $(2 = 1)$ và $(3 = 2)$ đều sai nên $(2 = 1) \Leftrightarrow (3 = 2)$ là mệnh đề đúng.

Câu II. Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Với $n = 1$, ta được

$$13^n - 1 = 13 - 1 = 12 : 12 - \text{mệnh đề đúng.}$$

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$ tức là $(13^k - 1) : 12$.

Ta đi chứng minh $(13^{k+1} - 1) : 12$, thật vậy:

$$13^{k+1} - 1 = 13^{k+1} - 13^k + 13^k - 1 = 12 \cdot 13^k + (13^k - 1)$$

suy ra $(13^{k+1} - 1) : 12$ bởi $12 \cdot 13^k : 12$ và $(13^k - 1) : 12$.

Vậy, với mọi n nguyên dương thì $13^n - 1$ chia hết cho 12.

Câu III.

a. Ta có:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ước của } 12 \text{ và ước của } 15\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ước của } \text{uscln}(12, 15)\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ước của } 3\} - \text{Chỉ ra tính chất đặc trưng.} \\ &= \{1, 3\} - \text{Liệt kê.} \end{aligned}$$

b. Ta lần lượt chứng minh:

▪ Chứng minh $A \subset B$, ta có:

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4 \Rightarrow x = 3k = 4l, \text{ với } k, l \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow l \text{ chia hết cho } 3 \Rightarrow l = 3l_1, \text{ với } l_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 12l_1 \\ &\Rightarrow x \text{ là bội của } 12 \Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

Do đó, ta được $A \subset B$. (1)

▪ Chứng minh $B \subset A$, ta có:

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \text{ là bội của } 12 \Rightarrow x = 12n = 3 \cdot (4n) = 4 \cdot (3n), \text{ với } n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4 \Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

Do đó, ta được $B \subset A$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $A = B$.

c. Ta có:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{a, b, c\}, & A \cup (B \cap C) &= \{b, c\}, \\ (A \cup B) \cap (A \cup C) &= \{a, b, c\}, & (A \cap B) \cup C &= \{b, c, e\}. \end{aligned}$$

Vậy, khẳng định thứ 2 là đúng.

Câu IV.

a. Ta có:

$$\Delta = \left| \pi - \frac{22}{7} \right| = \frac{22}{7} - \pi < 3,1429 - 3,1415 = 0,0014.$$

b. Giả sử $x = 2,56 \pm u$, $y = y = 4,2 \pm v$ là giá trị gần đúng của chiều rộng và chiều dài của sân.

Ta có:

$$P = 2(x + y) = 2(2,56 \pm u + 4,2 \pm v) = 13,52 \pm 2(u + v).$$

Theo giả thiết:

$$-0,01 \leq u, v \leq 0,01 \Rightarrow -0,04 \leq 2(u + v) \leq 0,04$$

Vậy, $P = 13,52\text{m} \pm 0,04\text{m}$.

ĐỀ SỐ 3

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - x + 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} \geq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -x < 0 \\ x^2 - x + 1 \geq 0 \\ -x \geq 0 \\ x^2 - x + 1 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x.$$

Vậy, hàm số xác định trên toàn trục số.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Để hàm số là hàm lẻ, điều kiện là:

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0, 3).$$

Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0).$$

Đồ thị hàm số được cho bởi hình bên.

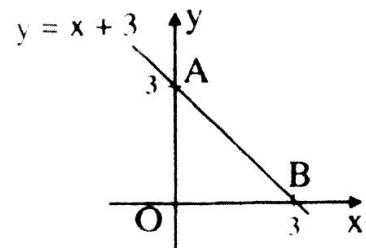
Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Trong ΔOAB , ta có $\widehat{ABO} = \alpha$, suy ra:

$$\tan \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$



Câu III.

a. Ta lần lượt tính:

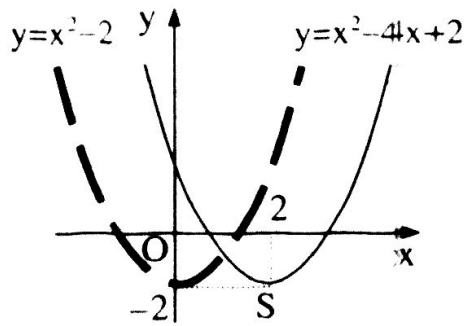
$$-\frac{b}{2a} = 2 \text{ và } -\frac{\Delta}{4a} = -2.$$

Vậy, đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh $S(2, -2)$, nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	CĐ -2	$+\infty$

Đồ thị: ta lấy thêm hai điểm trên đồ thị là $A(0, 2)$, $B(4, 2)$.



b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Giả sử:

$$y = x^2 - 2 = f(x + a)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 = (x + a)^2 - 4(x + a) + 2 = x^2 + (2a - 4)x + a^2 - 4a + 2.$$

Suy ra :

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 0 = 2a - 4 \\ -2 = a^2 - 4a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy, ta được :

$$y = x^2 - 2 = f(x + 2).$$

Do đó, đồ thị của hàm số được suy ra bằng phép tịnh tiến theo Ox đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2 đơn vị.

c. Vì số nghiệm của mỗi phương trình đúng bằng số giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị của các hàm số $y = x^2 - 4x + 2$ và $y = x^2 - 2$, do đó chúng đều có cùng số nghiệm.

ĐỀ SỐ 4

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Hàm số xác định khi:

$$x - m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m - 2.$$

Do đó, tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{m - 2\}$.

Từ đó, để hàm số xác định trên $[-1, 1]$, điều kiện là:

$$m - 2 \notin [-1, 1] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < -1 \\ m - 2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq 3 \end{cases}.$$

Vậy, với $m < 1 \vee m \geq 3$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Với $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{ax_1}{x_1 - 2} - \frac{ax_2}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = -\frac{2a}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

Để hàm số đồng biến trên $(2, +\infty)$, điều kiện là:

$$A > 0 \text{ với mọi } x_1, x_2 \in (2, +\infty) \text{ và } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2a > 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

Vậy, với $a < 0$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Hàm số trên là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1. \quad (*)$$

Vậy, với $0 < m \leq 1$ hàm số đã cho là hàm số bậc nhất.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hàm số trên đồng biến trên $\mathbf{R}$ khi:

$$m > 0.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được $0 < m \leq 1$.

Vậy, với $0 < m \leq 1$ hàm số đồng biến trên $\mathbf{R}$.

Chú ý: Trong lời giải trên:

- Ở câu a), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi chỉ thiết lập điều kiện $m \neq 0$.
- Ở câu b), nhiều em học sinh mắc sai lầm khi thiết lập điều kiện $m > 0$ nhưng lại không kết hợp với (*).

Câu III.

a. Ta lần lượt tính:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \text{ và } -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}.$$

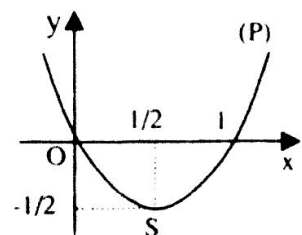
Vậy, đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh $S(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, nhận đường thẳng $x = \frac{1}{2}$

làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	CT $-\frac{1}{2}$	$+\infty$

Đồ thị: ta lấy thêm vài điểm trên đồ thị $O(0, 0)$, $B(1, 0)$.



b. Từ đồ thị, suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$.
- $y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

c. **Viết lại phương trình dưới dạng**

$$2x^2 - 2x = m - 1.$$

Khi đó, số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (P) và đường thẳng

(d): $y = m - 1$. Ta được:

- Với $m - 1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ phương trình vô nghiệm.

- Với $m - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$, phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.
- Với $m - 1 > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

ĐỀ SỐ 5

Câu I. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m + 2)x = 4 - m. \quad (1)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 0x = 6, \text{ mâu thuẫn} \Rightarrow \text{phương trình vô nghiệm.}$$

Trường hợp 2: Nếu $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{4 - m}{m + 2}.$$

Do đó (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 - m}{m + 2} = 1 \\ \frac{4 - m}{m + 2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = -2$ hoặc $m = 1$ phương trình ban đầu vô nghiệm.

Chú ý: Trong lời giải trên chúng ta trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận, tuy nhiên cũng có thể trình bày dưới dạng:

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$(m + 2)x = 4 - m. \quad (2)$$

Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m + 2 = 0 \\ 4 - m \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ \frac{4 - m}{m + 2} = 1 \vee \frac{4 - m}{m + 2} = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Tuy nhiên cách trình bày kiểu này có thể khiến một vài em học sinh thấy phức tạp. Do vậy, nếu bài toán yêu cầu "Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm)" tốt nhất các em hãy trình bày theo các bước của bài toán giải biện luận.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\Delta' = 1 + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{5}{2} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2}.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) - 3 \\
 &= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\
 &= \frac{1}{2} [(a+b) + (b+c) + (c+a)] \left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] - 3 \\
 &\geq \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot 3 \frac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} - 3 \\
 &= \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0.$$

Vậy, phương trình luôn có nghiệm.

Để phương trình có nghiệm kép, điều kiện là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow \text{dấu đẳng thức xảy ra tại } (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = b+c = c+a \\ \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} = \frac{1}{c+a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy, với $a = b = c$ phương trình có nghiệm kép $x = 1$.

Câu III.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$x = 3y + 4.$$

Nhận xét rằng, với $\forall y \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $x = 3y + 4 \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thoả mãn $(3y + 4, y)$ với $y \in \mathbb{Z}$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$D = 2m - 3, D_x = -2m - 3, D_y = 2m^2 + m.$$

Trường hợp 1: Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Khi đó, với $m = \frac{3}{2}$, suy ra $D_x = -6 \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 2m - 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$.

Hệ có nghiệm duy nhất:

$$x = -\frac{2m+3}{2m-3} = -1 - \frac{6}{2m-3},$$

$$y = \frac{2m^2+m}{2m-3} = m + 2 + \frac{6}{2m-3}.$$

Hệ có nghiệm nguyên với m nguyên $\Leftrightarrow 2m - 3$ là ước của 6 với $m \in \mathbb{Z}$.

Ta có bảng liệt kê sau:

$2m-3$	-3	-2	-1	1	2	3
m	0	$1/2$ (loại)	1	2	$5/2$ (loại)	3

Vậy, với $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ hệ có nghiệm nguyên.

Câu IV. Ta có thể trình bày theo các cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp chung của hệ đối xứng loại I để thực hiện các yêu cầu của bài toán.

Đặt:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}, \text{ điều kiện } S^2 - 4P \geq 0.$$

Khi đó, hệ được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} S^2 - 4P = m \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = \frac{36 - m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \frac{36 - m}{2} \end{cases}$$

khí đó, x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0. \quad (1)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 26$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = 5 \\ x = 5 \text{ và } y = 1 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 26$ hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1, 5)$ và $(5, 1)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow (1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18.$$

Vậy, với $m < 18$ hệ phương trình vô nghiệm.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \text{phương trình (1) có nghiệm duy nhất}$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó, hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(3, 3)$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ để thực hiện yêu cầu c) của bài toán.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \quad (*)$$

Khi đó, hệ có dạng:

$$\begin{cases} 2x_0^2 = m \\ 2x_0 = 6 \end{cases} \Rightarrow m = 18.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 18$, ta được:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 3 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Cách 3: Sử dụng phương pháp thế để thực hiện các yêu cầu của bài toán.

Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x^2 + (6 - x)^2 = m \\ y = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 12x + 36 - m = 0 \quad (2) \\ y = 6 - x \end{cases} \quad (I)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 26$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = 5 \\ x = 5 \text{ và } y = 1 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 26$ hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1, 5)$ và $(5, 1)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta'_{(2)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18.$$

Vậy, với $m < 18$ hệ phương trình vô nghiệm.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$$

Khi đó hệ có nghiệm $x = y = 3$.

Vậy, với $m = 18$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(3, 3)$.

ĐỀ SỐ 6

Câu I. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: Kí hiệu phương trình ban đầu là (1).

ĐKXD là tập $D = \mathbb{R} \setminus \{1, m\}$.

Viết lại phương trình dưới dạng:

$$mx = 2 - m. \quad (2)$$

Do đó (1) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-m}{m} \neq 1 \\ \frac{2-m}{m} \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \{-2, 0, 1\}.$$

Vậy, với $m = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta đi xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Khi đó:

- Với $m = 1$, phương trình có dạng:

$$0.x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

- Với $m = -1$, phương trình có dạng:

$$0.x^2 + 0.x + 1 = 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Trường hợp 2: Nếu $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Điều kiện để phương trình có một nghiệm là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, \text{ không thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy, với $m = 1$ phương trình có một nghiệm duy nhất.

Câu III.

a. Biến đổi phương trình về dạng:

$$y = -3x + 6.$$

Nhận xét rằng, với $\forall x \in \mathbb{Z}$, ta luôn có $y = -3x + 6 \in \mathbb{Z}$.

Vậy, phương trình có vô số nghiệm nguyên thỏa mãn $(x, 6 - 3x)$ với $x \in \mathbb{Z}$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$D = m^2 + 1 \neq 0$ với $\forall m$, nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$$D_x = 1 - m^2, D_y = 2m.$$

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1 - m^2}{m^2 + 1}, \frac{2m}{m^2 + 1} \right)$.

Để nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I, điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} > 0 \\ \frac{2m}{m^2 + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV. Trừ từng vế hệ phương trình, ta được :

$$x - y = -(x^2 - y^2) + (x - y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} \quad (I) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = -y \\ x^2 + m = 0 \end{cases} \quad (II)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 0$, ta được

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{cases} \text{ và } (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Vậy, với $m = 0$ hệ có hai cặp nghiệm là $(0, 0)$ và $(2, 2)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (1) \text{ có nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \geq 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $m \leq 1$.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận:

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$.

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow x_0 = x_0^2 - x_0 + m \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \xrightarrow{+} x + y = y^2 - y + 1 + x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Nghiệm thỏa mãn hệ và là nghiệm duy nhất.

Vậy, với $m = 1$ hệ có nghiệm duy nhất.

ĐỀ SỐ 7

Câu I. Biến đổi tương đương bất đẳng thức về dạng:

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left[\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \right] &\leq 3(a^2+b^2+c^2) \\ \Leftrightarrow \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} &\leq a^2+b^2+c^2 \\ \Leftrightarrow c^2 - \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + a^2 - \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} + b^2 - \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ac(c-a)}{a+b} + \frac{bc(c-b)}{a+b} + \frac{ab(a-b)}{b+c} + \frac{ac(a-c)}{b+c} + \frac{ab(b-a)}{c+a} + \frac{bc(b-c)}{c+a} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ac(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc(c-b)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{ab(b-a)^2}{(c+a)(b+c)} &\geq 0, \text{ đúng.} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0. \quad (1)$$

Khi đó, bất phương trình vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình vô nghiệm.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Đặt $f(x) = (x - 2)(x^3 + x^2 - 6x)$, khi đó:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 + x^2 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 2)(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)^2(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$(x - 2)^2$	+	+	+	0	+
$x + 3$	-	0	+	+	+
f(x)	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = (-3, 0) \cup \{2\}.$$

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{x^2 - 8x + 15} \geq 0.$$

Bằng việc lập bảng xét dấu (Bạn đọc tự làm ra nháp) ta nhận được tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, 3) \cup (5, +\infty).$$

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Kí hiệu bất phương trình là (1).

Biến đổi tương đương bất phương trình về dạng:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ x^2 - 8x + 14 \leq 0 \\ x - 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x \leq 4 + \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{5} \leq x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [3 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{2}]$.

Chú ý: Bài toán trên có thể giải bằng định nghĩa, như sau:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow |x - 5| \geq x^2 - 7x + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq x^2 - 7x + 9 \\ x - 5 \leq -x^2 + 7x - 9 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 14 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - \sqrt{2} \leq x \leq 4 + \sqrt{2} \\ 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 3 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow 3 - \sqrt{5} \leq x \leq 4 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 8

Câu I. Ta có:

$$|a| = |(a \pm b) \mp b| \leq |a \pm b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a \pm b|.$$

- Với bất đẳng thức $|a + b| \geq |a| - |b|$, dấu "=" xảy ra khi $a \geq 0$ và $b \leq 0$.
- Với bất đẳng thức $|a - b| \geq |a| - |b|$, dấu "=" xảy ra khi $b(a - b) \geq 0$.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$$(m - 1)x > m - 3, \quad (1)$$

$$(m + 1)x > m - 2. \quad (2)$$

Ta đi xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m = 1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 0x > -2, \text{ luôn đúng.}$$

$$(2) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 2: Nếu $m = -1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x < 2.$$

$$(2) \Leftrightarrow 0x > -3, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 3: Nếu $m \neq \pm 1$ thì:

Khi đó, để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ \frac{m-3}{m-1} = \frac{m-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ m^2 - 2m - 3 = m^2 - 3m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy, với $m = 5$, hai bất phương trình tương đương với nhau.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ và } x \neq 3.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $x > 2$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x-3} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{-3x+10}{x-3} \geq 0.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	3	10/3	$+\infty$
$x-3$			-	0	+
$-3x+10$		+	+	0	-
VT			-	+	-

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = (3, \frac{10}{3}].$$

Trường hợp 2: Nếu $x < 2$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-(x-2)}{(x-2)(x-3)} \geq 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{x-3} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3x-8}{x-3} \leq 0$$

mâu thuẫn do $x < 2$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (3, \frac{10}{3}]$.

Chú ý:

1. Từ điều kiện có nghĩa của bất phương trình nên chúng ta không xét với $x = 2$.
2. Khi đã thành thạo việc sử dụng dấu của nhị thức bậc nhất, các em học sinh có thể trình bày lời giải bất phương trình trên bằng phép biến đổi tương đương như sau:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ \frac{1}{x-3} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \frac{10-3x}{x-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ \frac{1}{3-x} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ \frac{3x-8}{3-x} \geq 0 \end{cases}$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là $3 < x \leq \frac{10}{3}$.

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: Kí hiệu hệ là (*).

Vì $x^2 + x + 1 > 0, \forall x$, nên ta biến đổi tương đương về dạng:

$$\begin{cases} 12x^2 - (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 + (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Khi đó, để (*) đúng với mọi x điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 4.3.12 < 0 \\ (m+6)^2 - 4.3.12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 21 \\ -18 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Vậy, với $-3 < m < 6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 0 \leq 2(x^2-1) \leq (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [1, 3] \cup \{-1\}$.

ĐỀ SỐ 9

Câu I. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta nhận xét rằng:

$$\begin{aligned}a^4 + b^4 + c^4 &= \frac{1}{2}(a^4 + b^4) + \frac{1}{2}(b^4 + c^4) + \frac{1}{2}(c^4 + a^4) \\&\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{2}a^2(b^2 + c^2) + \frac{1}{2}b^2(c^2 + a^2) + \frac{1}{2}c^2(a^2 + b^2) \\&\geq a^2bc + b^2ca + c^2ab = abc(a + b + c).\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Kí hiệu hai bất phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Ta đi giải từng bất phương trình của hệ.

▪ Giải (1), ta được $x \leq \frac{2m-2}{3} \Rightarrow$ tập nghiệm của (1) là $T_1 = (-\infty, \frac{2m-2}{3}]$.

▪ Giải (2), bằng việc viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$mx \leq 1 - m. \quad (3)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m = 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow 0x \leq 1 \text{ luôn đúng} \Rightarrow \text{tập nghiệm của (2) là } T_2 = \mathbf{R}.$$

Khi đó, tập nghiệm của hệ là $T = T_1 \cap T_2 = T_1$, và không duy nhất.

Trường hợp 2. Với $m > 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow x \leq \frac{1-m}{m} \Rightarrow \text{tập nghiệm của (2) là } T_2 = (-\infty, \frac{1-m}{m}].$$

Khi đó, tập nghiệm của hệ là $T = T_1 \cap T_2 = (-\infty, \min\{\frac{2m-2}{3}, \frac{1-m}{m}\}]$, và không

duy nhất.

Trường hợp 3. Với $m < 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow x \geq \frac{1-m}{m} \Rightarrow \text{tập nghiệm của (2) là } T_2 = [\frac{1-m}{m}, +\infty).$$

Khi đó, để hệ có nghiệm duy nhất, điều kiện là:

$$\frac{2m-2}{3} = \frac{1-m}{m} \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = -3/2 \end{cases}$$

Vậy, hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\frac{3}{2}$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(x-1) - 2(2x-1)}{(2x-1)(x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1}{(2x-1)(x-1)} \leq 0.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1/2	1	$+\infty$
$-x - 1$		+	0	-	-
$2x - 1$	-	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
f(x)	+	0	-	+	-

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = [-1, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty).$$

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: Kí hiệu bất phương trình là (1).

Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - 4x$ và $x - 5$:

x	$-\infty$	0	4	5	$+\infty$
$x^2 - 4x$	+	0	-	0	+
$x - 5$	-	-	-	0	+

Trường hợp 1: Với $x \leq 0$ hoặc $4 \leq x \leq 5$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}.$$

Trường hợp 2: Với $0 < x < 4$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x + 3}{x^2 - x + 5} \geq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

Trường hợp 3: Với $x > 5$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 5} \geq 1 \Leftrightarrow 5x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{5} \text{ loại.}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup [\frac{1}{2}, 2]$.

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$\begin{cases} 1 - 4x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 0 < x \leq 1/2 \end{cases}$$

Cách 1: Xét hai trường hợp dựa trên điều kiện.

- Với $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 - 4x^2} < 1 - 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x > 0 \\ 1 - 4x^2 < (1 - 3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $-\frac{1}{2} \leq x < 0$.

- Với $0 < x \leq \frac{1}{2}$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1 - 4x^2} > 1 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x < 0 \\ 1-4x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 1-4x^2 > (1-3x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 13x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 < x \leq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện đang xét được nghiệm là $0 < x \leq \frac{1}{2}$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

Cách 2: Thực hiện phép nhân liên hợp, ta biến đổi:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{1-4x^2})(1+\sqrt{1-4x^2})}{x} < 3(1+\sqrt{1-4x^2}) \\ &\Leftrightarrow 4x < 3 + 3\sqrt{1-4x^2} \Leftrightarrow 3\sqrt{1-4x^2} > 4x - 3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 < 0 \\ 1 - 4x^2 \geq 0 \\ 4x - 3 \geq 0 \\ 9(1 - 4x^2) > (4x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{4} \\ |x| < \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{3}{4} \\ 9(1 - 4x^2) > (4x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$.

CHƯƠNG V THỐNG KÊ

ĐỀ SỐ 10

Câu I.

a. Ta ấn:

SHIFT CLR 1 để xoá bộ nhớ thống kê.

Để nhập dữ liệu, ta ấn:

1,54 **DT** 1,65 **DT** 1,54 **DT** 1,66 **DT** 1,69 **DT** 1,72 **DT** 1,54 **DT** 1,7 **DT**

b. Sử dụng các phím **▼ ▲** để chuyển màn hình về:

rồi ấn:

1,48 **=**

x4 =	1,66
------	------

x4 =	1,48
------	------

c. Sử dụng các phím $\blacktriangledown$ $\blacktriangle$ để chuyển màn hình về:

$$x8 = 1,9$$

rồi ấn:

SHIFT **CL**

d. Ta ấn ngay:

1,75 **DT**

e. Ta ấn:

SHIFT **CL**

Câu II. Ta lần lượt thực hiện:

- Ấn **MODE** **MODE** **2** - Thiết lập kiểu *REG*.
- Ấn **SHIFT** **CLR** **1** (**Scl**) **=** - Xóa bộ nhớ thống kê.
- Bắt đầu nhập dữ liệu:

10 **,** 1003 **DT**, màn hình có dạng

$$\begin{array}{c} \text{REG} \\ n = 1. \end{array}$$

Mỗi khi ấn **DT** để đăng nhập dữ liệu màn hình sẽ hiện tổng tần số n

15 **,** 1005 **DT** 20 **,** 1010 **DT** 25 **,** 1011 **DT** 30 **,** 1014 **DT**

- Tới đây, để nhận được các giá trị A , B , r ,..., ta thực hiện:

1. Hệ số hồi quy A ($A = 997.4$), ta ấn:

$$\text{SHIFT} \text{S-VAR} \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \text{1} \text{ = } 997.4$$

2. Hệ số hồi quy B ($B = 0.56$), ta ấn:

$$\text{SHIFT} \text{S-VAR} \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \text{2} \text{ = } 0.56$$

3. Hệ số tương quan r ($r = 0.982607368$), ta ấn:

$$\text{SHIFT} \text{S-VAR} \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \text{3} \text{ = } 0.982607368$$

4. Tính áp suất ở nhiệt độ 18°C (1007.48), ta ấn:

$$18 \text{ SHIFT S-VAR} \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \text{2} \text{ = } 1007.48$$

5. Tính nhiệt độ khi áp suất bằng 1000hPa (4.642857143), ta ấn:

$$1000 \text{ SHIFT S-VAR} \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \text{1} \text{ = } 4.642857143$$

6. Tính hệ số tới hạn r^2 ($r^2 = 0.965517241$), ta ấn:

$$\text{SHIFT} \text{S-VAR} \blacktriangleright \blacktriangleright \blacktriangleright \text{3} \text{ x}^2 \text{ = } 0.965517241$$

7. Tính số hiệp biến ($= 35$), ta ấn:

$$\begin{array}{l} (\text{SHIFT} \text{S-SUM} \blacktriangleright \text{3} \text{ = } \text{SHIFT} \text{S-SUM} \text{3} \text{ = } \\ \text{SHIFT} \text{S-VAR} \text{1} \text{ = } \text{SHIFT} \text{S-VAR} \blacktriangleright \text{1} \text{ = } \\ (\text{SHIFT} \text{S-SUM} \text{3} \text{ = } \text{1}) \text{ = } 35 \end{array}$$

ĐỀ SỐ 11

Câu I.

a. Ta ấn:

SHIFT CLR 1 = để xóa bộ nhớ thống kê.

Để nhập dữ liệu, ta ấn:

7,5 **SHIFT ; 14 DT**

9 **SHIFT ; 3 DT**

9,5 **DT**

10 **DT DT**

Để tính $\bar{X}$, ta ấn:

SHIFT S-VAR 1 = 8,075

b. Sử dụng các phím **▼ ▲** để chuyển màn hình về "x1 = 7,5" rồi ấn:

7 **=**

Sử dụng các phím **▼** để chuyển màn hình về "Freq1 = 14" rồi ấn:

24 **=**

Để tính $\bar{X}$, ta ấn:

SHIFT S-VAR 1 = 7,48333333

c. Sử dụng các phím **▼ ▲** để chuyển màn hình về "x4 = 10" rồi ấn:

SHIFT CL

Để tính $\bar{X}$, ta ấn:

SHIFT S-VAR 1 = 7,30357142

d. Ta ấn:

7 **SHIFT ; 20 DT**

Để tính $\bar{X}$, ta ấn:

SHIFT S-VAR 1 = 7,17708333

e. Ta ấn:

SHIFT CL

Câu II. Ta lần lượt thực hiện:

- Ấn **MODE MODE 2 ► 3** - Thiết lập kiểu **REG Quad**.
- Ấn **SHIFT CLR 1 (Scl) =** - Xóa bộ nhớ thống kê.
- Bắt đầu nhập dữ liệu:

29 **,** 1.6 **DT**, màn hình có dạng

REG
n = 1.

Mỗi khi ấn **DT** để đăng nhập dữ liệu màn hình sẽ hiện tổng tần số n

50 **,** 23.5 **DT** 74 **,** 38.0 **DT** 103 **,** 46.4 **DT** 118 **,** 48.0 **DT**

- Tới đây, để nhận được các giá trị A, B, C, ..., ta thực hiện:

- Hệ số hồi quy A ($A = -35.59856934$), ta ấn:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{S-VAR}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{-35.59856934}$$

- Hệ số hồi quy B ($B = 1.495939413$), ta ấn:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{S-VAR}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{1.495939413}$$

- Hệ số hồi quy C ($C = -6.71629667 \times 10^{-3}$), ta ấn:

$$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{S-VAR}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{-6.71629667 \times 10^{-3}}$$

- Tính $\hat{y}$ tại $x_i = 16$ ($= -13.38291067$), ta ấn:

$$16 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{S-VAR}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{3} \boxed{=} \boxed{-13.38291067}$$

- Tính $\hat{x}_1$ tại $y_i = 20$ ($= 47.14556728$), ta ấn:

$$20 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{S-VAR}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{1} \boxed{=} \boxed{47.14556728}$$

- Tính $\hat{x}_2$ khi y_i là 20 ($= 175.5872105$), ta ấn:

$$20 \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{S-VAR}} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{175.5872105}$$

ĐỀ SỐ 12

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Chú ý: Để có lời giải không phụ thuộc vào kết quả của câu a) ta sử dụng phép biến đổi như sau:

$$C = \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha}}{\cot^2 \alpha - \cot \alpha + 1} = \frac{\cot^2 \alpha + 1}{\cot^2 \alpha - \cot \alpha + 1} = \frac{10}{7}.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Viết lại S dưới dạng:

$$\begin{aligned} S &= (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + \\ &\quad + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ \\ &= (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + (\cos 40^\circ - \cos 40^\circ) + \\ &\quad + (\cos 60^\circ - \cos 60^\circ) + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết suy ra:

$$6 = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^4 x + \sin^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{4 \sin^2 2x} = \frac{8 - 2\sin^2 2x}{\sin^2 2x}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin^2 2x = 8 - 2\sin^2 2x \Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = 2 + 2\sin x + 1 - \sin^2 x \Leftrightarrow y = 3 + 2\sin x - \sin^2 x.$$

Đặt $t = \sin x$, điều kiện $|t| \leq 1$, ta được:

$$y = 3 + 2t - t^2.$$

Hoành độ đỉnh của Parabol $t_0 = 1 \in [-1, 1]$.

Ta có kết luận:

- $y_{\text{Max}} = y(t_0) = y(1) = 4$ đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $y_{\text{Min}} = y(-1) = 0$ đạt được khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu III. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \cos A + \cos B + \cos C = (\cos A + \cos B) + \cos C \\ &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + \cos C = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) \cdot \cos \frac{A-B}{2} + \cos C \\ &= 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + (1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}) = 1 - 2\sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2}\right) \\ &= 1 - 2\sin \frac{C}{2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) - \cos \frac{A-B}{2}\right] \\ &= 1 - 2\sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2}\right) = 1 + 4\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

Hướng dẫn cách thực hiện:

Bước 1: Vì VT có $\cos A, \cos B, \cos C$ ta lựa chọn phép biến đổi tổng thành tích cho hai toán tử $\cos A, \cos B$ còn $\cos C$ sẽ lựa chọn phép biến đổi sau.

Bước 2: Thông qua việc biến đổi

$$\cos A + \cos B = 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2\sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

ta nhận thấy sự xuất hiện của $\sin \frac{C}{2}$, do đó lựa chọn phép biến đổi cho

$$\cos C = 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}.$$

Bước 3: Tiếp theo ta có sự xuất hiện

$$\sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2}$$

Vì sự có mặt của cả ba góc A, B, C , do vậy ta cần tìm cách đưa về biến đổi hai góc bằng phép thay $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$.

ĐỀ SỐ 13

Câu I.

a. $\sin \alpha = \frac{15}{17}, \tan \alpha = -\frac{15}{8}$. b. $A = -\frac{61}{29}$.

Chú ý: Để có lời giải không phụ thuộc vào kết quả của câu a) ta sử dụng phép biến đổi như sau:

$$A = \frac{\frac{5 \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{5 \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{4 \sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{5 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 4}{9 \cos^2 \alpha - 4} = -\frac{61}{29}.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Viết lại S dưới dạng:

$$\begin{aligned} S &= 2(\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ) + \sin^2 90^\circ \\ &= 2[(\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ] + \sin^2 90^\circ \\ &= 2(44 + \frac{1}{2}) + 1 = 90. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết suy ra:

$$\begin{aligned} m.n &= (\cos a + \cos b)(\sin a + \sin b) \\ &= (\sin a \cos b + \sin b \cos a) + (\sin a \cos a + \sin b \cos b) \\ &= \sin(a+b) + \frac{1}{2}(\sin 2a + \sin 2b) = \sin(a+b) + \sin(a+b) \cos(a-b) \\ &= [1 + \cos(a-b)] \sin(a+b). \end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác, ta có thể biến đổi giả thiết như sau:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (\cos a + \cos b)^2 = m^2 \\ (\sin a + \sin b)^2 = n^2 \end{cases} \\ \Rightarrow m^2 + n^2 = (\cos^2 a + \sin^2 a) + 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b) + (\cos^2 b + \sin^2 b) \\ = 2 + 2\cos(a-b) \\ \Rightarrow \cos(a-b) = \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 2). \end{aligned} \tag{2}$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$m.n = [1 + \frac{1}{2}(m^2 + n^2 - 2)] \sin(a+b) \Leftrightarrow \sin(a+b) = \frac{2mn}{m^2 + n^2}.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Viết lại hàm số dưới dạng:

$$y = (\sin x + 1)^2 + 4.$$

Vì $|\sin x| \leq 1$ nên:

$$y \leq (1 + 1)^2 + 4 = 8 \Rightarrow y_{\max} = 8, \text{ đạt được khi:}$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$y \geq 4 \Rightarrow y_{\min} = 4$, đạt được khi:

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu III. Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \sin^2 C \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \sin^2 C = 1 - \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + \sin^2 C \\ &= 1 - \cos(\pi - C) \cdot \cos(A-B) + \sin^2 C = 1 + \cos C \cdot \cos(A-B) + 1 - \cos^2 C \\ &= 2 + [\cos(A-B) - \cos C] \cdot \cos C = 2 + [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \cdot \cos C \\ &= 2 + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C. \end{aligned}$$

Nhận xét:

- Như vậy, ta thực hiện phép biến đổi cho $\sin^2 A$ và $\sin^2 B$, tuy nhiên **không tồn tại** phép biến đổi lượng giác cho hai toán tử bậc cao, do vậy ở đây ta đã sử dụng công thức hạ bậc để thực hiện.
- Khi có sự xuất hiện của $\cos C$, ta lại lựa chọn phép biến đổi

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C.$$
- Cuối cùng với $\cos(A-B) - \cos C$, ta lựa chọn $\cos C = -\cos(A+B)$.
- Kết quả của ví dụ trên được sử dụng để xác định dạng của ΔABC khi so sánh tổng $S = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ với 2, cụ thể:
 - Nếu $S > 2 \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 0 \Leftrightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0$
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$ nhọn.
 - Nếu $S = 2 \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \vee \cos B = 0 \vee \cos C = 0$
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông.
 - Nếu $S < 2 \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0 \Leftrightarrow$ một trong ba $\cos A, \cos B, \cos C$ nhỏ hơn không
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$ tù.

B. HÌNH HỌC

ĐỀ SỐ 14

Câu I. a). sai và b). đúng.

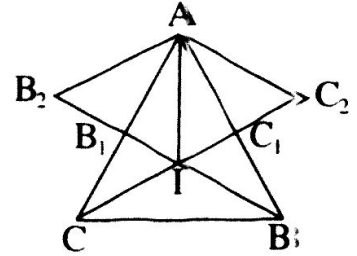
Câu II. Đẳng thức là đúng.

Giải thích: Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2 \parallel CC_1$ và $AC_2 \parallel BB_1$, ta được:

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB_2} + \overrightarrow{IC_2}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{IB_2}{IB} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a} \\ \overrightarrow{IB_2} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB_2} = -\frac{b}{a} \overrightarrow{IB}. \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{IC_2}{IC} = \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{c}{a} \\ \overrightarrow{IC_2} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC_2} = -\frac{c}{a} \overrightarrow{IC}. \quad (3)$$



Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\overrightarrow{IA} = -\frac{b}{a} \overrightarrow{IB} - \frac{c}{a} \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}, \text{ đpcm.}$$

Câu III.

a. Với G là trọng tâm ΔABC ta luôn có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Từ giả thiết ta nhận được:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3 \overrightarrow{MG}.$$

Vậy MN luôn đi qua trọng tâm G của ΔABC khi M thay đổi.

b. Vì P là trung điểm của CN nên:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MC}). \end{aligned}$$

Gọi J là điểm thoả mãn:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2 \overrightarrow{JC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4 \overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB} + 2 \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ tồn tại duy nhất điểm J cố định.

Từ đó:

$$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2} (1 + 1 + 2) \overrightarrow{MJ} = 2 \overrightarrow{MJ}.$$

Vậy MP luôn đi qua một điểm cố định J khi M thay đổi.

Câu IV.

a. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án A.

b. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án C.

Lời giải tự luận: Giả sử $M(x, y)$, khi đó:

$$\overrightarrow{BM}(x-1, y-3) \Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow M(4, 3).$$

ĐỀ SỐ 15

Câu I. a), b), c). đúng.

Câu II. Đẳng thức là đúng.

Giải thích: Với G_1, G_2 là trọng tâm các $\Delta A_1B_1C_1$ và $\Delta A_2B_2C_2$, ta có:

$$\overrightarrow{G_1A_1} + \overrightarrow{G_1B_1} + \overrightarrow{G_1C_1} = \vec{0}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{G_2A_2} + \overrightarrow{G_2B_2} + \overrightarrow{G_2C_2} = \vec{0}. \quad (2)$$

Mặt khác, ta có:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2A_2}. \quad (3)$$

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2B_2}. \quad (4)$$

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{C_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2C_2}. \quad (5)$$

Cộng theo vế (3), (4), (5) và sử dụng các kết quả trong (1) và (2), ta được:

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}, \text{ đpcm.}$$

Câu III.

a. Ta có:

$$\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{b+c} = \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1C}} = \frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b+c} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}.$$

b. Tương tự câu a), ta được:

$$\overrightarrow{BB_1} = \frac{c}{c+a} \overrightarrow{BC} + \frac{a}{c+a} \overrightarrow{BA} = \frac{c}{c+a} \overrightarrow{BC} - \frac{a}{c+a} \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \frac{c}{a+b} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CB} = -\frac{c}{a+b} \overrightarrow{AC} - \frac{b}{a+b} \overrightarrow{BC}.$$

Từ đó:

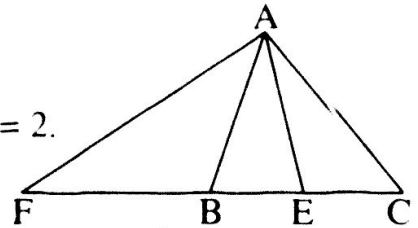
$$\begin{aligned} \vec{0} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} \\ &= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right) \overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right) \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a}\right) (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \left(\frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right) \overrightarrow{AC} + \left(\frac{c}{c+a} - \frac{b}{a+b}\right) \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right) \overrightarrow{AC} - \left(\frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} - \frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b}\right) \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ là hai vectơ không cùng phương, nên đẳng thức trên đúng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} + \frac{c}{b+c} - \frac{c}{a+b} = 0 \\ \frac{b}{b+c} - \frac{a}{c+a} - \frac{c}{c+a} + \frac{b}{a+b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

Câu IV. Ta có:

$$AB^2 = 4 + 4 = 8 \text{ và } AC^2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow k = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$



a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử $E(x, y)$, theo tính chất phân giác trong, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EB}} = -2 \Leftrightarrow \overrightarrow{EC}(2-x, -2-y) = -2\overrightarrow{EB}(3-x, -5-y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -2(3-x) \\ -2-y = -2(-5-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow E\left(\frac{4}{3}, -4\right).$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử $F(x, y)$, theo tính chất phân giác ngoài, ta được:

$$\frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FB}} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{FC}(2-x, -2-y) = 2\overrightarrow{FB}(3-x, -5-y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 2(3-x) \\ -2-y = 2(-5-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow F(4, -8).$$

CHƯƠNG II TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

ĐỀ SỐ 16

Câu I. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$A = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\frac{9}{8}.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1), ta được:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

theo tính giao hoán, ta có:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2).$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Bằng cách tính tương tự, ta được:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (a^2 + c^2 - b^2) \text{ và } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2).$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{2} (a^2 + c^2 - b^2) - \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2) - \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2) \\ &= -\frac{1}{2} (a^2 + c^2 + b^2). \end{aligned}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (2)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (2), ta được:

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4} (AB^2 + AC^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4} [c^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)] = \frac{1}{4} (2c^2 + 2b^2 - a^2) \\ \Leftrightarrow AM &= \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}. \quad (*) \end{aligned}$$

Suy ra

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2} = \frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

d. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Gọi α là góc nhọn tạo bởi AG và BC, khi đó:

$$|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}. \quad (3)$$

Ta đi tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$, bằng cách:

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3} (AC^2 - AB^2) = \frac{1}{3} (b^2 - c^2). \quad (4)$$

Thay (4) vào (3), ta được:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{1}{3} |b^2 - c^2|}{\frac{1}{3} \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2} \cdot a} = \frac{|b^2 - c^2|}{a \sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}.$$

Chú ý: Ta cũng có thể tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ bằng cách:

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}. \quad (5)$$

Bình phương hai vế của (5), ta được:

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(a^2 + c^2 + b^2).$$

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{2 + 3 + 4}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow p - a = \frac{1}{2}, p - b = \frac{3}{2}, p - c = \frac{5}{2}.$$

do đó:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{3\sqrt{15}}{8}.$$

$$S = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_b = \frac{2S}{b} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{15}}{6}.$$

ĐỀ SỐ 17

Câu I. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$A = \frac{-b'\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2ab^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{-a\sqrt{3} - b + 2a\sqrt{3}} = \frac{-b' + ab^2\sqrt{3}}{a\sqrt{3} - b} = \frac{b^2(a\sqrt{3} - b)}{a\sqrt{3} - b} = b^2.$$

Câu II.a **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.**Lời giải tự luận:** Ta có:

$$\overrightarrow{AB}(-2, -1), \overrightarrow{AC}(4, -3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) = -5.$$

b **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.**Lời giải tự luận:** Ta có:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

c **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.**Lời giải tự luận:** Gọi $A_1(x, y)$ là chân đường cao từ đỉnh A của ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA_1} \parallel \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1, y-2) \cdot (6, -2) = 0 \\ (x+1, y-1) \parallel (6, -2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2(y-2) = 0 \\ \frac{x+1}{6} = \frac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Vậy, ta được $A_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

d **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.**Lời giải tự luận:** Gọi H(x, y) là trực tâm H của ΔABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1, y-2) \cdot (6, -2) = 0 \\ (x+1, y-1) \cdot (4, -3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy, ta được H(2, 5).

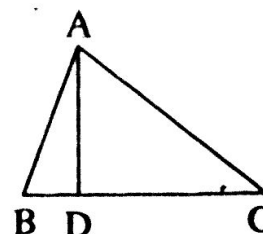
Câu III.a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.**Lời giải tự luận:** Ta có:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Trong ΔACD , ta có:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \frac{7}{2}.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.**Lời giải tự luận:** Trong ΔABC , ta có:

$$R = \frac{AB}{2 \sin \widehat{ACB}}. \quad (1)$$

Trong đường tròn (I_1), ta có:

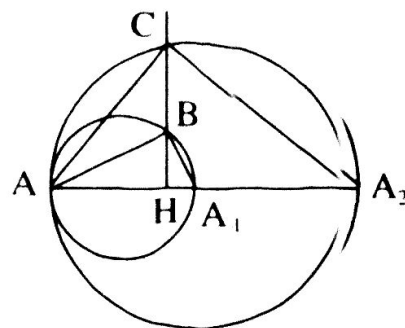
$$AB^2 = AA_1 \cdot AH = 4AH. \quad (2)$$

Trong đường tròn (I_2), ta có:

$$AC^2 = AA_2 \cdot AH = 16AH. \quad (3)$$

Trong ΔHAC , ta có:

$$\begin{aligned} \sin \widehat{ACB} &= \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \\ &= \frac{AH}{4\sqrt{AH}} = \frac{\sqrt{AH}}{4}. \end{aligned} \quad (4)$$



Thay (2), (4) vào (1), ta được $R = 4$.

ĐỀ SỐ 13

Câu I. Ta có thể thực hiện theo hai cách sau:

Cách 1: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\begin{aligned} VT &= \left[\frac{(\sqrt{1-\cos\alpha})^2 - (\sqrt{1+\cos\alpha})^2}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} \right]^2 = \left[\frac{-2\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \right]^2 = \left[\frac{-2\cos\alpha}{|\sin\alpha|} \right]^2 \\ &= \frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4\tan^2\alpha, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Cách 2: Ta biến đổi VT của đẳng thức:

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \\ &= \frac{(1-\cos\alpha)^2 + (1+\cos\alpha)^2 - 2(1-\cos^2\alpha)}{1-\cos^2\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4\tan^2\alpha, \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Câu II. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA}. \end{aligned} \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

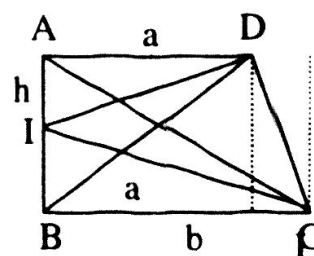
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}) \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2.$$

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\begin{aligned} BD \perp CI &\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CI} = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{C_1A} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B_1I} = -ab + h \cdot \frac{h}{2} \\ \Leftrightarrow h^2 &= 2ab. \end{aligned}$$



b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$AC \perp DI \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DB} = h \cdot \frac{h}{2} - ba$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 2ab.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$BM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD})$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}$$

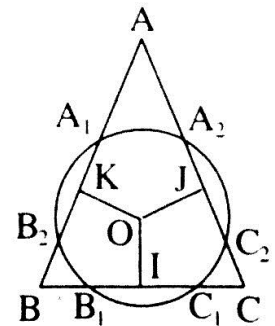
$$= -\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = -b^2 + h^2 - b(b-a) = -2b^2 + h^2 + ab$$

$$\Leftrightarrow h^2 = 2b^2 - ab.$$

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Gọi O là tâm đường tròn cân xác định, và I, J, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O lên BC, CA, AB.



Từ giả thiết:

$$B_1C_1 = C_2A_2 = A_1B_2 \Leftrightarrow OI = OJ = OK$$

$$\Leftrightarrow O \text{ là tâm đường tròn nội tiếp } \triangle ABC.$$

Khi đó bán kính R của đường tròn cân xác định được cho bởi:

$$R^2 = OB_1^2 = IB_1^2 + OI^2. \quad (1)$$

Ta có:

$$IB_1 = \frac{B_1C_1}{2} = 1. \quad (2)$$

$$a^2 = BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 9 + 36 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 27$$

$$OI = r = (p - a) \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} (b + c - a) \tan \frac{A}{2} = \frac{1}{2} (6 + 3 - 3\sqrt{3}) \tan 30^\circ$$

$$= \frac{3(\sqrt{3} - 1)}{2}. \quad (3)$$

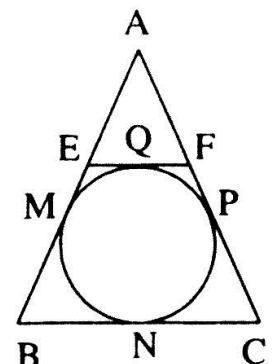
Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$R^2 = \frac{20 - 9\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{40 - 18\sqrt{3}}}{2}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có hai $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ đồng dạng, do đó:

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB}. \quad (1)$$



Ta có:

$$\begin{cases} c = AB = AM + MB = AM + NB \\ b = AC = AP + PC = AM + NC \end{cases}$$

$$\Rightarrow b + c = 2AM + BC = 2AM + 6$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = \frac{1}{2}(b + c - a) = p - a. \quad (2)$$

$$\begin{cases} AM = AE + EM = AE + EQ \\ AM = AP = AF + FP = AF + FQ \end{cases} \Rightarrow 2AM = AE + AF + EF$$

$$\Leftrightarrow AM = AP = p_{\Delta AEF}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$\frac{2}{6} = \frac{p-6}{p} \Leftrightarrow p = 9.$$

Vậy chu vi của ΔABC bằng 18.

c. Sử dụng định lý hàm số sin trong ΔABC , ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$\frac{A \cdot \frac{a}{2R} + B \cdot \frac{b}{2R}}{A+B} + \frac{B \cdot \frac{b}{2R} + C \cdot \frac{c}{2R}}{B+C} + \frac{C \cdot \frac{c}{2R} + A \cdot \frac{a}{2R}}{C+A} = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A \cdot a + B \cdot b}{A+B} + \frac{B \cdot b + C \cdot c}{B+C} + \frac{C \cdot c + A \cdot a}{C+A} = a + b + c. \quad (1)$$

Trong ΔABC , đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn, do đó:

$$(A - B)(a - b) \geq 0 \Leftrightarrow A \cdot a + B \cdot b \geq A \cdot b + B \cdot a$$

$$\Leftrightarrow 2(A \cdot a + B \cdot b) \geq A \cdot b + B \cdot a + A \cdot a + B \cdot b = (A + B)(a + b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{A \cdot a + B \cdot b}{A + B} \geq \frac{1}{2}(a + b). \quad (2)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{B \cdot b + C \cdot c}{B + C} \geq \frac{1}{2}(b + c). \quad (3)$$

$$\frac{C \cdot c + A \cdot a}{C + A} \geq \frac{1}{2}(c + a). \quad (4)$$

Cộng theo vế (2), (3), (4), ta được:

$$\frac{A \cdot a + B \cdot b}{A + B} + \frac{B \cdot b + C \cdot c}{B + C} + \frac{C \cdot c + A \cdot a}{C + A} \geq a + b + c. \quad (5)$$

Vậy (1) có được khi dấu "=" xảy ra tại (5) $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

ĐỀ SỐ 19

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Gọi $M(x, y)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d_1) luôn đi qua với $\forall k$

$$\Leftrightarrow kx - y + k = 0 \quad \forall k \Leftrightarrow (x + 1)k - y = 0 \quad \forall k \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1, 0).$$

Vậy (d_1) luôn đi qua điểm cố định $M(-1, 0)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Xét hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2) là:

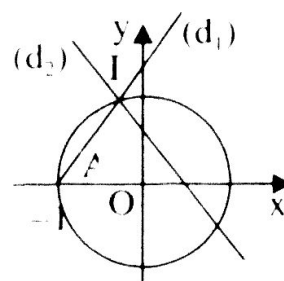
$$\begin{cases} kx - y = -k \\ (1 - k^2)x + 2ky = 1 + k^2 \end{cases}$$

Ta có:

$$D = 1 + k^2, D_1 = 1 - k^2, D_2 = 2k.$$

Vì $D \neq 0 \forall k \Rightarrow (d_1)$ và (d_2) luôn cắt nhau tại I có tọa độ là nghiệm của hệ, tức là:

$$I\left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}, \frac{2k}{1 + k^2}\right).$$



c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \\ y = \frac{2k}{1 + k^2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2}\right)^2 + \left(\frac{2k}{1 + k^2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Vậy, quỹ tích của giao điểm I của (d_1) và (d_2) thuộc đường tròn $x^2 + y^2 = 1$.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Vì (C) tiếp xúc với (d) tại điểm M, suy ra tâm I của (C) thuộc đường thẳng (Δ) có phương trình cho bởi:

$$(\Delta): \begin{cases} \text{qua } M(1,2) \\ \text{vtcp } \vec{n}(7,-1) \end{cases} \Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow I(1 + 7t, 2 - t).$$

(C) tiếp xúc với (d) khi và chỉ khi

$$IM = R \Leftrightarrow R^2 = IM^2 = 50t^2.$$

Khi đó phương trình của đường tròn (C) có dạng:

$$(C): (x - 1 - 7t)^2 + (y - 2 + t)^2 = 50t^2. \quad (1)$$

Điểm $A(-1, -2) \in (C) \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-6, 3)$ & bán kính $R^2 = 50$.

Vậy phương trình (C): $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Đường tròn (C) có tâm $I(1, -1)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Để xác định phương trình tiếp tuyến ta có hai cách giải sau:

Cách 1: Giả sử tiếp điểm là $M(x_0, y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$\begin{aligned} (d): (x - 1)(x_0 - 1) + (y + 1)(y_0 + 1) &= 10 \\ \Leftrightarrow (d): (x_0 - 1)x + (y_0 + 1)y - x_0 + y_0 - 8 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Vì $M(x_0, y_0) \in (C)$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 = 10 \quad (2)$$

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45° khi và chỉ khi:

$$\cos 45^\circ = \frac{|2(x_0 - 1) + 1 \cdot (y_0 + 1)|}{\sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{(x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2}} \Leftrightarrow |2x_0 + y_0 - 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 6 - 2x_0 & (3) \\ y_0 = -4 - 2x_0 & (4) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được:

$$\begin{cases} x_0 = 2 & \& y_0 = 2 \\ x_0 = 4 & \& y_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(2,2) \\ M_2(4,-2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (4) ta được:

$$\begin{cases} x_0 = 0 & \& y_0 = -4 \\ x_0 = -2 & \& y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_3(0,-4) \\ M_4(-2,0) \end{cases}$$

Từ đó:

- Với $M_1(2, 2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_1) : $x + 3y - 8 = 0$.
- Với $M_2(4, -2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_2) : $3x - y - 14 = 0$.
- Với $M_3(0, -4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_3) : $x + 3y + 12 = 0$.
- Với $M_4(-2, 0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến (d_4) : $3x - y + 6 = 0$.

Vậy tồn tại bốn tiếp tuyến (d_1) , (d_2) , (d_3) , (d_4) tới (C) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Cách 2: Giả sử tiếp tuyến (d) có phương trình:

$$(d): Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường tròn (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R \Leftrightarrow \frac{|A - B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{10}. \quad (2)$$

Đường thẳng (d) tạo với (Δ) một góc bằng 45° khi và chỉ khi:

$$\cos 45^\circ = \frac{|2A + B|}{\sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \left[\frac{2A + B}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{A^2 + B^2}} \right]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = -3B \\ A = \frac{B}{3} \end{cases}$$

Với $A = -3B$, thay vào (2), ta được:

$$\frac{|-3B - B + C|}{\sqrt{(-3B)^2 + B^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |C - 4B| = 10|B| \Leftrightarrow \begin{cases} C = 14B \\ C = -6B \end{cases}$$

- Với $C = 14B$, thay vào (1), ta được tiếp tuyến (d_1) : $-3Bx + By + 14B = 0 \Leftrightarrow (d_1): 3x - y - 14 = 0$.
- Với $C = -6B$, thay vào (1), ta được tiếp tuyến (d_2) : $-3Bx + By - 6B = 0 \Leftrightarrow (d_2): 3x - y + 6 = 0$.

Với $A = \frac{B}{3}$, tương tự – *Để nghị bạn đọc tự giải.*

Câu III.

a. Nhận xét rằng:

$$\mathcal{P}_{M(E)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} < 1 \Leftrightarrow M \text{ nằm trong Elíp}$$

do đó mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng đường thẳng (d) không thể song song với Oy, do đó giả sử (d) có hệ số góc k, ta được:

$$y = k(x - 1) + 1 \Leftrightarrow (d): y = kx - k + 1. \quad (1)$$

Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = kx - k + 1 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9(kx - k + 1)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 - 18k(k - 1)x + 9k^2 - 18k - 27 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thoả mãn:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \frac{18k(k - 1)}{4 + 9k^2} \\ x_A \cdot x_B = \frac{9k^2 - 18k - 27}{4 + 9k^2} \end{cases}$$

Theo giả thiết $MA = MB$

$$\Leftrightarrow x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow \frac{18k(k - 1)}{4 + 9k^2} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}$$

Thay $k = -\frac{4}{9}$ vào (1), ta được đường thẳng (d): $4x + 9y - 13 = 0$.

ĐỀ SỐ 20

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta có toạ độ các điểm :

$$A(a, 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7}), B(1, 0), C(2a - 1, 0),$$

Từ giả thiết:

$$\bullet A \in P(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 3a\sqrt{7} - 3\sqrt{7} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq 1.$$

$$\bullet p = 9 \Leftrightarrow \frac{AB + BC + AC}{2} = 9 \Leftrightarrow 2.8a - 11 + 2|a - 1| = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 0 \end{cases} (I)$$

Từ đó $A(2, 3\sqrt{7}), B(1, 0), C(3, 0)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta cần tìm điểm $M \in AB$ (tức là phải tìm $x = BM, 0 \leq x \leq 8$) sao cho trên cạnh BC tồn tại điểm N thoả mãn:

$$BN = p - x = 9 - x, 0 \leq 9 - x \leq 2 \Leftrightarrow 7 \leq x \leq 9,$$

$$\frac{S_{\triangle BMN}}{S_{\triangle ABM}} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Từ (1) ta được:

$$\frac{BM \cdot BN}{AB \cdot BC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x(9 - x)}{8 \cdot 2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = 1 \end{cases} (I)$$

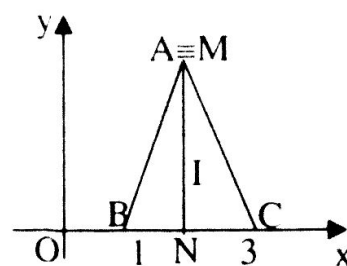
• Với $x = 8 \Rightarrow M \equiv A(2, 3\sqrt{7})$ và $N(2, 0)$ là trung điểm BC:

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng:

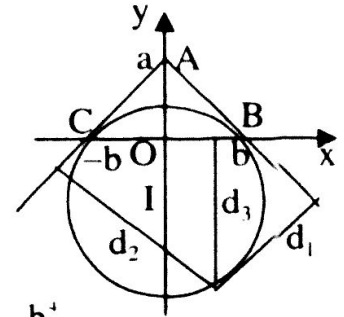
$$(C): (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$



Vì AB, AC đối xứng qua Oy, suy ra tâm $I(\alpha, \beta) \in Oy$ nên $\alpha = 0$.

(C) tiếp xúc với AB tại B, suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ R = IB \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{b^2}{a} \\ R = \sqrt{b^2 + \beta^2} \end{cases}.$$



Vậy, phương trình đường tròn (C): $x^2 + (y + \frac{b^2}{a})^2 = b^2 + \frac{b^4}{a^2}$.

b. Phương trình đường thẳng (AB) được cho bởi (phương trình đoạn chắn):

$$(AB): \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow (AB): ax + by - ab = 0.$$

Phương trình đường thẳng (AC) được cho bởi (phương trình đoạn chắn):

$$(AC): \frac{x}{-b} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow (AC): ax - by + ab = 0.$$

Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$, suy ra:

$$x_0^2 + (y_0 + \frac{b^2}{a})^2 = b^2 + \frac{b^4}{a^2} \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + 2\frac{b^2}{a}y_0 - b^2 = 0. \quad (1)$$

Khoảng cách d_1, d_2, d_3 từ M tới các đường thẳng AB, AC, BC được cho bởi:

$$d_1 = \frac{|ax_0 + by_0 - ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad d_2 = \frac{|ax_0 - by_0 + ab|}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad d_3 = y_0.$$

Khi đó:

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{|a^2x_0^2 - (by_0 - ab)^2|}{a^2 + b^2} = \frac{|a^2x_0^2 - b^2y_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2|}{a^2 + b^2}. \quad (2)$$

Nhân hai vế của (1) với $a^2 \neq 0$, ta được

$$a^2x_0^2 + a^2y_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2x_0^2 + 2ab^2y_0 - a^2b^2 = -a^2y_0^2 \quad (3)$$

Thay (3) vào (2), ta được $d_1 \cdot d_2 = y_0^2 = d_3^2$ (đpcm).

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử $A_1 \in (P) \Rightarrow A_1(x_0, x_0^2)$.

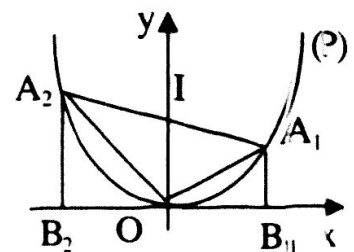
Khi đó:

- $B_1(x_0, 0) \Rightarrow OB_1 = |x_0|$.
- Phương trình đường thẳng (OA_1) : $y = xx_0$.
- Theo giả thiết $OA_2 \perp OA_1$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng (OA_2) : $y = -\frac{1}{x_0}x$.

- Tọa độ của A_2 là nghiệm hệ phương trình:

$$A_2: \begin{cases} y = x^2 \\ y = -\frac{1}{x_0}x \end{cases} \Rightarrow A_2: \begin{cases} x = -\frac{1}{x_0} \\ y = \frac{1}{x_0^2} \end{cases} \Rightarrow A_2(-\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_0^2}).$$



$$B_2(-\frac{1}{x_0}, 0) \Rightarrow OB_2 = |-\frac{1}{x_0}|.$$

Vậy $OB_1 \cdot OB_2 = 1$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

- Phương trình (A_1A_2) được xác định bởi:

$$(A_1A_2): \frac{x + \frac{1}{x_0}}{x_0 + \frac{1}{x_0}} = \frac{y - \frac{1}{x_0}}{x_0^2 - \frac{1}{x_0^2}} \Leftrightarrow (A_1A_2): x x_0^3 + (1 - y) x_0^2 - x x_0 = 0. \quad (1)$$

- Ta đi chứng minh A_1A_2 luôn đi qua một điểm cố định.

Thật vậy giả sử $I(x, y)$ là điểm cố định của họ đường thẳng A_1A_2

$$\Leftrightarrow (1) \text{ đúng với mọi } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I(0, 1).$$

Vậy (A_1A_2) luôn đi qua một điểm cố định $I(0, 1)$.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Điểm $M(3, -4)$, suy ra:

$$P_{M/(E)} = \frac{9}{9} + \frac{16}{4} > 1 \Leftrightarrow M \text{ nằm ngoài } (E) \Rightarrow \text{qua } M \text{ kẻ được 2 tiếp tuyến đến } (E).$$

Để xác định phương trình tiếp tuyến, ta lựa chọn một trong ba cách giải sau:

Cách 1: Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

$$(d): A(x - 3) + B(y + 4) = 0 \Leftrightarrow (d): Ax + By - 3A + 4B = 0.$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (E) khi:

$$9A^2 + 4B^2 = (-3A + 4B)^2 \Leftrightarrow 12B^2 - 24AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ B = 2A \end{cases}$$

- Với $B = 0$, ta được tiếp tuyến

$$(d_1): A(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (d_1): x - 3 = 0,$$

và toạ độ tiếp điểm M_1 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_1(3, 0).$$

- Với $B = 2A$, ta được tiếp tuyến

$$(d_2): A(x - 3) + 2A(y + 4) = 0 \Leftrightarrow (d_2): x + 2y + 5 = 0.$$

và toạ độ tiếp điểm M_2 là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = -\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}).$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm M_1 và M_2 là:

$$(M_1M_2): \begin{cases} \text{qua } M_1(3,0) \\ \text{qua } M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}) \end{cases} \Leftrightarrow (M_1M_2): x - 3y - 3 = 0$$

Cách 2: Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là tiếp điểm của (E) với tiếp tuyến (d) cần tìm, ta được:

$$M_0(x_0, y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \quad (1)$$

$$(d): \frac{xx_0}{9} + \frac{yy_0}{4} = 1 \quad (2)$$

Vì $M \in (d)$ nên:

$$\frac{x_0}{3} - y_0 = 1 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 3y_0 + 3 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} M_1(3,0) \\ M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (d_1): x - 3 = 0 \\ (d_2): x + 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

Nhận xét rằng toạ độ hai tiếp điểm đều thoả mãn (*), do đó phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm có dạng:

$$\frac{x}{3} - y = 1 \Leftrightarrow x - 3y - 3 = 0.$$

Cách 3: Họ tiếp tuyến (d_t) của (E) có dạng:

$$\frac{x}{3} \sin t + \frac{y}{2} \cos t = 1. \quad (1)$$

Do điểm $M(3, -4) \in (d_t)$ nên:

$$\sin t - 2\cos t = 1 \Leftrightarrow \sin t = 1 + 2\cos t \Leftrightarrow$$

$$\xrightarrow{\sin^2 t + \cos^2 t = 1} \begin{cases} \sin t = 1 + 2\cos t \\ (1 + 2\cos t)^2 + \cos^2 t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 1 + 2\cos t \\ 5\cos^2 t + 4\cos t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 1 + 2\cos t \\ \cos t = 0 \\ \cos t = -4/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 0 \& \sin t = 1 \\ \cos t = -\frac{4}{5} \& \sin t = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

- Với $\sin t = 1$ và $\cos t = 0$, thay vào (1) được tiếp tuyến $(d_1): x - 3 = 0$ và toạ độ tiếp điểm là $M_1(3, 0)$.
- Với $\sin t = -\frac{3}{5}$ và $\cos t = -\frac{4}{5}$, thay vào (1) được tiếp tuyến

$$(d_2): x + 2y + 5 = 0 \text{ và toạ độ tiếp điểm là } M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}).$$

- Phương trình đường thẳng đi qua hai tiếp điểm M_1 và M_2 là:

$$(M_1M_2): \begin{cases} \text{qua } M_1(3,0) \\ \text{qua } M_2(-\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}) \end{cases} \Leftrightarrow (M_1M_2): x - 3y - 3 = 0.$$

ĐỀ SỐ 21

Câu I.

a. Đồ thị hàm số đi qua hai điểm O và A(2, -1).

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

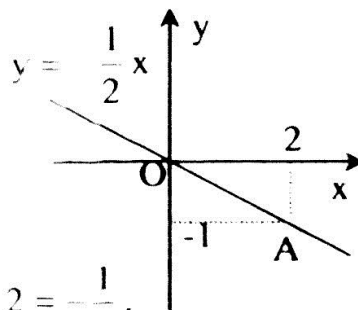
Lời giải tự luận: Điểm B thuộc đồ thị hàm số, suy ra:

$$y_B = -\frac{1}{2}x_B. \quad (1)$$

Thay $x_B = 4y_B + 2$ vào (1), ta được:

$$y_B = -\frac{1}{2}(4y_B + 2) \Leftrightarrow y_B = -\frac{1}{3} \Rightarrow x_B = 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = -\frac{1}{3}.$$

Vậy, điểm B $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm.



Câu II. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 , điều kiện là:

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 3-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \neq m \leq 3. \quad (*)$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m+1} \end{cases}.$$

Suy ra:

$$4(x_1 + x_2) = 7x_1 x_2 \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{2(m-1)}{m+1} = 7 \cdot \frac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6 \text{ thỏa mãn } (*).$$

Vậy, với $m = -6$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$D = m^2 + 1 \neq 0$ với $\forall m$, nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$$D_x = 1 - m^2, D_y = 2m.$$

Vậy, với mọi m hệ luôn có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1-m^2}{m^2+1}, \frac{2m}{m^2+1}\right)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Để nghiệm (x, y) là một điểm thuộc góc phần tư thứ I, điều kiện là:

$$\begin{cases} \frac{1-m^2}{m^2+1} > 0 \\ \frac{2m}{m^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m^2 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy, với $0 < m < 1$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Câu V. Ta có:

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2) = 2a^2 > 0$$

$\Leftrightarrow$ góc A nhọn.

Tương tự góc B, C nhọn.

ĐỀ SỐ 22

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Đồ thị cắt trục Oy tại A có:

$$x = 0 \Rightarrow y = -0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0, 3).$$

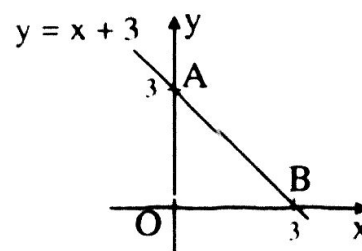
Đồ thị cắt trục Ox tại B có:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0).$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$



c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Trong ΔOAB , ta có $\widehat{ABO} = \alpha$, suy ra:

$$\tan \alpha = \frac{OA}{OB} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

d. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Từ đồ thị suy ra:

- $y > 0 \Leftrightarrow x < 3$, ứng với phần đồ thị phía trên trục Ox.
- $y \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, ứng với phần đồ thị phía dưới trục Ox.

Câu II. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 - 2x = m.$$

Khi đó số nghiệm trên tập $D = (0, +\infty)$ của phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ với Parabol (P): $y = x^2 - 2x$ trên D.

Đồ thị Parabol (P): $y = x^2 - 2x$ được cho bởi hình bên.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Phương trình có nghiệm dương

$$\Leftrightarrow m \geq -1.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

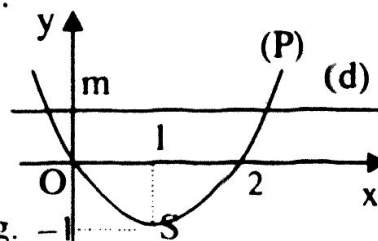
Lời giải tự luận: Phương trình có đúng một nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow m \geq 0 \text{ hoặc } m = -1.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Phương trình có hai nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow -1 < m < 0.$$



Câu III. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} 2y = m - x \\ x^2 + (m - x)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = m - x \\ 2x^2 - 2mx + m^2 - 8 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Với $m = 4$, ta được:

$$\begin{cases} 2y = 4 - x \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 4 - x \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 4$ hệ phương trình có một cặp nghiệm là $(2, 1)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ phương trình có đúng một nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(1)} = 0 \Leftrightarrow 16 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4.$$

Vậy, với $m = \pm 4$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (1), ta được:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2). \end{aligned} \quad (2)$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Tính AM, ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (3)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (3), ta được:

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{4}[c^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)] = \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2) \\ \Leftrightarrow AM &= \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Tính AD, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}, \\ \frac{ab}{b+c} \overrightarrow{BD} + \frac{ac}{b+c} \overrightarrow{CD} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

suy ra:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ac}{b+c}\right) \overrightarrow{AD} &= \frac{ab}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{ac}{b+c} \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow (b+c) \overrightarrow{AD} &= b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC}. \end{aligned} \quad (4)$$

Bình phương vô hướng hai vế của (4), ta được:

$$\begin{aligned} (b+c)^2 AD^2 &= (b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC})^2 = b^2 AB^2 + c^2 AC^2 + 2bc \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= b^2 c^2 + c^2 b^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \\ &= bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = bc(b+c+a)(b+c-a) = 4bcp(p-a) \\ \Leftrightarrow AD &= \frac{2}{b+c} \sqrt{bcp(p-a)}. \end{aligned}$$

Câu V. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}
 0 &= (\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2) + (\overline{BD}^2 - \overline{AD}^2) \\
 &= (\overline{AC} - \overline{BC})(\overline{AC} + \overline{BC}) + (\overline{BD} - \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{AD}) \\
 &= \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{BC}) + \overline{BA}(\overline{BD} + \overline{AD}) \\
 &= \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{BC} - \overline{BD} - \overline{AD}) = \overline{AB} \cdot \overline{DC} \\
 &\Leftrightarrow AB \perp CD.
 \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 23

Câu I.

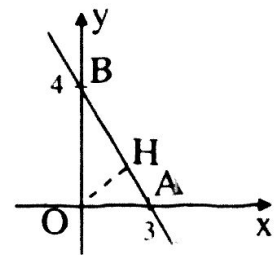
a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Đồ thị hàm số đi qua điểm A(0, 4) khi và chỉ khi:

$$4 = a \cdot 0 - 3a \Leftrightarrow 3a = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}.$$

Vậy, hàm số có dạng $y = -\frac{4}{3}x + 4$.

Để vẽ đồ thị hàm số ta lấy thêm điểm B(3, 0).



b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng.

Trong $\triangle OAB$ vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow OH = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{4 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$

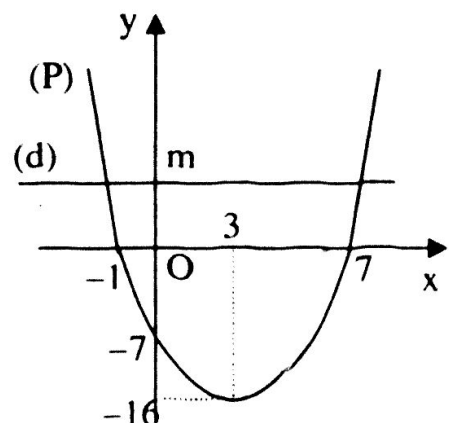
Vậy, khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng bằng $\frac{12}{5}$.

Câu II. Viết lại phương trình dưới dạng:

$$x^2 - 6x - 7 = m.$$

Khi đó số nghiệm trên tập $D = (-\infty, 0) \cup (7, +\infty)$ của phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d): $y = m$ với Parabol (P): $y = x^2 - 6x - 7$ trên D.

Đồ thị Parabol (P): $y = x^2 - 6x - 7$ được cho bởi hình bên.



a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Phương trình có nghiệm thuộc D

$$\Leftrightarrow m > -7.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Phương trình có một nghiệm thuộc D

$$\Leftrightarrow -7 < m \leq 0.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Phương trình có hai nghiệm phân biệt thuộc D

$$\Leftrightarrow m > 0.$$

Câu III. Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = x - m \\ (x - m)^2 + 2x - 2m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - m \\ x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m - 3 = 0 \end{cases}$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 1$, ta được:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ và } y = 1 \\ x = -2 \text{ và } y = -3 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 1$ hệ có hai cặp nghiệm $(2, 1)$ và $(-2, -3)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Biến đổi tiếp hệ về dạng:

$$\begin{cases} y = x - m \\ (x - m - 1)(x - m + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - m \\ \begin{cases} x - m - 1 = 0 \\ x - m + 3 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + 1 \text{ và } y_1 = 1 \\ x_2 = m - 3 \text{ và } y_2 = -3 \end{cases}$$

Tức là, với mọi m hệ luôn có hai cặp nghiệm.

Điều kiện $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ trở thành:

$$(m + 1)^2 + 1 = (m - 3)^2 + 9 \Leftrightarrow 8m - 16 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy, với $m = 2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết ta được:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2) = \frac{1}{2} (AB^2 - AC^2) \\ &\Leftrightarrow AB^2 - AC^2 = a^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác theo Pitago, ta được:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 = (a\sqrt{3})^2 = 3a^2. \quad (2)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (2), ta được:

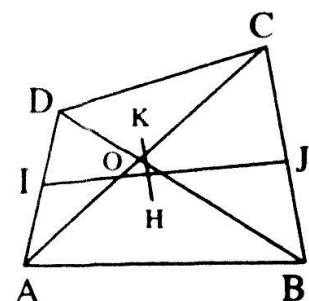
$$AB = a\sqrt{2}, AC = a.$$

Câu V. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}, \\ \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}, \\ \Rightarrow \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}). \end{aligned}$$

Xét:

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{DC}) \\
&= \frac{1}{2} (\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{DC}) \\
&= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})] \\
&= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) \cdot \overrightarrow{OA}] \\
&= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CK}) \cdot \overrightarrow{OA}] \\
&= \frac{1}{2} (\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{OA}) = 0
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow HK \perp IJ.$

ĐỀ SỐ 24

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hàm số $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 1 > 0$, do đó nó là hàm đồng biến.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hàm số:

$$f(x) + g(x) = (m^2 + 1)x - 4 + mx + 2 = (m^2 + m + 1)x - 2.$$

có hệ số:

$$a = m^2 + m + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{nó là hàm đồng biến.}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hàm số:

$$f(x) - g(x) = (m^2 + 1)x - 4 - (mx + 2) = (m^2 - m + 1)x - 6.$$

có hệ số:

$$a = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{nó là hàm đồng biến.}$$

d. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Hàm số:

$$g(x) - f(x) = mx + 2 - [(m^2 + 1)x - 4] = -(m^2 - m + 1)x + 6.$$

có hệ số:

$$a = -(m^2 - m + 1) = -\left[\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0 \Rightarrow \text{nó là hàm nghịch biến.}$$

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Xét hai trường hợp của m .

Trường hợp 1. Với $m = 0$, phương trình có dạng:

$$-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình có nghiệm duy nhất điều kiện là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m - 1)^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, với $m = 0$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu II. Đặt:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}, \text{ điều kiện } S^2 - 4P \geq 0.$$

Hi đó, hệ được biến đổi về dạng:

$$\begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = \frac{36 - m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \frac{36 - m}{2} \end{cases}$$

Hi đó, x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 6t + \frac{36 - m}{2} = 0. \quad (1)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 26$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ và } y = 5 \\ x = 5 \text{ và } y = 1 \end{cases}$$

Vậy, với $m = 26$ hệ phương trình có hai cặp nghiệm $(1, 5)$ và $(5, 1)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow (1) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta'_{(1)} < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18.$$

Vậy, với $m < 18$ hệ phương trình vô nghiệm.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ (2), suy ra:

$$2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IJ}) + 5(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IJ}) + 3(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}) + 5\overrightarrow{IB} - 10\overrightarrow{IJ} = \vec{0}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow J \text{ là trung điểm của BI.}$$

b. Từ (2), suy ra:

$$2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{JM} + 3\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Leftrightarrow M, N, J \text{ thẳng hàng.}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

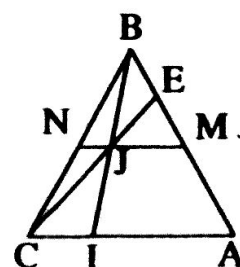
Lời giải tự luận: Ta có:

$$\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow CJ \text{ cắt } AB \text{ tại điểm } E \text{ thỏa mãn}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{5}\overrightarrow{EA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{5}{7}.$$



Chú ý: Trong lời giải c) chúng ta đã sử dụng kết quả:

“ Nếu $\vec{MN} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}$ thì đường thẳng MN sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm I thỏa mãn $\alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB} = \vec{0}$ ”.

Câu V. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

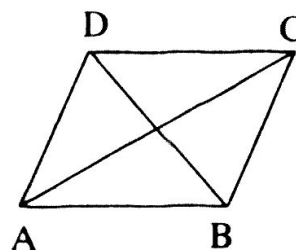
Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

- Trong $\triangle ACD$, ta có:

$$\begin{aligned} AC^2 &= DA^2 + DC^2 - 2DA \cdot DC \cdot \cos \widehat{ADC} \\ &= b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos \widehat{ADC}. \quad (1) \end{aligned}$$

- Trong $\triangle ABD$, ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} \\ &= b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \widehat{ADC}) \\ &= b^2 + a^2 + 2ab \cdot \cos \widehat{ADC}. \end{aligned}$$



(2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được $BD^2 + AC^2 = 2(a^2 + b^2)$.

ĐỀ SỐ 25

Câu I.

- a. Đồ thị hàm số $y = x^2$ được vẽ dựa trên 5 điểm:

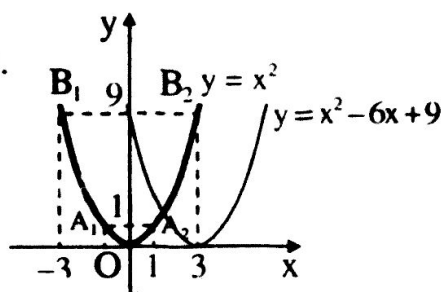
$O, A_1(-1, 1), A_2(1, 1), B_1(-3, 9), A_3(3, 9)$.

- b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = f(x - 3).$$

Do đó, đồ thị của hàm số $y = x^2 - 6x + 9$ được suy ra bằng phép tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^2$ theo Ox sang phải 3 đơn vị.



Câu II.

- a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2.$$

- b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

$$S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = a^3 - 3a.$$

$$S_4 = x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2.$$

$$S_7 = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^4 + x_2^4)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^4x_2^3(x_1 + x_2) = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a.$$

- c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Đặt $x_1 = \sqrt[3]{3}$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$.

Theo câu a) thì với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$, ta có:

$$x_1^7 + x_2^7 = a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a \Leftrightarrow a^7 - 7a^5 + 14a^3 - 7a - 7 = 0.$$

Vậy, đa thức cần tìm có dạng:

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - 7 = 0.$$

Câu III.

a. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án A.

b. Bạn đọc tự giải.

Câu IV.

a. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án A.

Lời giải tự luận: Với giả thiết:

$$4 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2 \\ \Leftrightarrow AB = 2.$$

b. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với giả thiết:

$$9 = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{CB} \\ = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = CB^2 \\ \Leftrightarrow CB = 3.$$

c. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án C.

Lời giải tự luận: Với giả thiết:

$$6 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \\ = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 9 - BC \cdot AD = 9 - 3AD \\ \Leftrightarrow AD = 1.$$

d. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án C.

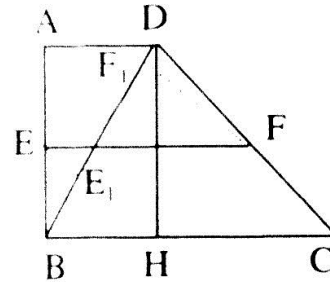
Lời giải tự luận: Trong ΔHCD , ta có:

$$CD^2 = HC^2 + HD^2 = (BC - BH)^2 + AB^2 = (3 - 1)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow CD = 2\sqrt{2}.$$

e. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\begin{aligned} BD \cdot E_1F_1 &= \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EF} \\ &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} (1 + 3) = 2 \\ \Leftrightarrow E_1F_1 &= \frac{2}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$



Câu V. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết ta nhận thấy tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AC và nếu R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABD thì:

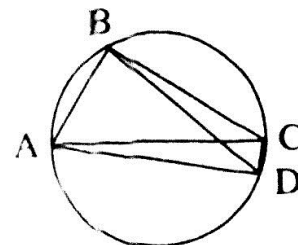
$$AC = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}}. \quad (1)$$

Trong ΔABD , ta có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 7a^2 \Leftrightarrow BD = a\sqrt{7}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$AC = \frac{a\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = \frac{2a\sqrt{21}}{3}.$$



ĐỀ SỐ 26

Câu I.

a. Ta có bảng sau:

Khảo sát $(P_1): y = -x^2 + 2x + 3$

Khảo sát $(P_2): y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$

- $-\frac{b}{2a} = 1$ và $-\frac{\Delta}{4a} = 4$.

- $-\frac{b}{2a} = 4$ và $-\frac{\Delta}{4a} = -5$.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	CD 4	$-\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	CT -5	$+\infty$

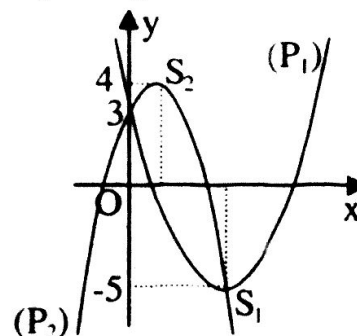
Đồ thị: Hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm phương trình:

$$-x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Khi đó, tọa độ các giao điểm là:

$E(0, 3)$ và $F(4, -5)$.



b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Từ đồ thị của (P_1) và (P_2) , đường thẳng $y = m$ cắt cả hai đồ thị

$$\Leftrightarrow -5 \leq m \leq 4.$$

Vậy, với $-5 \leq m \leq 4$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án C.

Lời giải tự luận: Nhận xét:

$$\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = 1,$$

đặt $t = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}$, điều kiện $t > 0$, suy ra $\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t}$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1$ ta được:

$$\begin{cases} \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \\ \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Thử lại thấy đúng.

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

Câu III. Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$x - y = -(x^2 - y^2) + (x - y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$$

Khi đó, hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} \quad (I) \text{ hoặc } \begin{cases} x = -y \\ x^2 + m = 0 \end{cases} \quad (II)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 0$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ và } (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Vậy, với $m = 0$ hệ có hai cặp nghiệm là $(0, 0)$ và $(2, 2)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (1) \text{ có nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} \geq 0 \\ \Delta_{(2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ -m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Vậy, hệ có nghiệm khi $m \leq 1$.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết với điểm O bất kỳ, ta được:

$$\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}), \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DN} = k \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OD} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}). \quad (2)$$

Trừ theo vế (2) cho (1), ta được:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) &= k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{AD} &= k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = (1 - k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

b. Sử dụng kết quả trong câu a), ta được:

$$\overrightarrow{EF} = (1 - l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{DC}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EI} &= (1 - l)\overrightarrow{AM} + l\overrightarrow{DN} = (1 - l)k\overrightarrow{AB} + lk\overrightarrow{DC} \\ &= k[(1 - l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{DC}]. \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), suy ra:

$$\overrightarrow{EI} = k\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow E, F, I \text{ thẳng hàng.}$$

Câu V. Gọi H là giao điểm của hai đường cao BB_1, CC_1 của ΔABC , để chứng minh ba đường cao trong ΔABC đồng quy, ta đi chứng minh $AH \perp BC$, thật vậy:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) + \overrightarrow{HB} \cdot (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}) + \overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0. \end{aligned}$$

Chú ý: Các em học sinh cần lưu ý, người ta có thể phát biểu bài toán trên dưới dạng khác " Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng nếu $AB \perp CD$ và $AD \perp BC$ thì $AC \perp BD$ ", khi đó ta thấy ngay C chính là trực tâm ΔABD .

ĐỀ SỐ 27

Câu I.

a. Bạn đọc tự giải và gọi (P) là đồ thị hàm số.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử:

$$y = 2x^2 + 9x + 10 = f(x + a) = 2(x + a)^2 + x + a = 2x^2 + (4a + 1)x + 2a^2 + a.$$

Bằng việc đồng nhất hệ số, ta suy ra:

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 9 = 4a + 1 \\ 10 = 2a^2 + a \end{cases} \Leftrightarrow a = 2.$$

Vậy, ta được:

$$y = 2x^2 + 9x + 10 = f(x + 2).$$

Do đó, đồ thị của hàm số được suy ra bằng phép tịnh tiến (P) theo Ox sang trái 2 đơn vị.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Đặt $t = x^2 - 3x + 3$, ta có:

Khi đó, phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} \sqrt{t} + \sqrt{t+3} &= 3 \Leftrightarrow t + t + 3 + 2\sqrt{t(t+3)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{t(t+3)} = 3 - t \\ \Rightarrow t(t+3) &= (3-t)^2 \Leftrightarrow 9t = 9 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Thử lại thấy cả hai nghiệm đều đúng.

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1, x = 2$.

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án A.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ y-2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ y+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Các vế của hệ phương trình đều không âm, bình phương các vế được:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x+y+3+2\sqrt{(x+5)(y-2)} = 49 \quad (1) \\ x+y+3+2\sqrt{(x-2)(y+5)} = 49 \end{cases} \\ \Rightarrow &\sqrt{(x+5)(y-2)} = \sqrt{(x-2)(y+5)} \Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Thay $x = y$ vào (1) được:

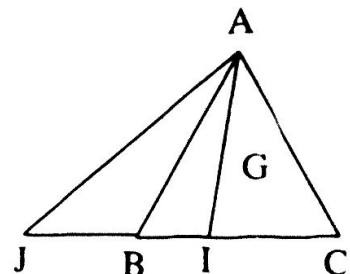
$$\begin{aligned} 2x+3+2\sqrt{(x+5)(x-2)} &= 49 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-10} = 23-x \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 23-x \geq 0 \\ x^2+3x-10 = (23-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 23 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11. \end{aligned}$$

Vậy, có nghiệm $x = y = 11$.

Câu IV. Từ giả thiết ta được:

$$\begin{cases} 2CI = 3BI \\ \overrightarrow{IC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}. \quad (1)$$

$$\begin{cases} 5JB = 2JCI \\ \overrightarrow{JB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{JC} \end{cases} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}. \quad (2)$$



a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Từ (1), ta được:

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) &= -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}. \end{aligned} \quad (3)$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ (2), ta được:

$$\begin{aligned} 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) &= 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. \end{aligned} \quad (4)$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (5)$$

Mặt khác từ hệ tạo bởi (3) và (4), ta nhận được:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ} \text{ và } \overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}. \quad (6)$$

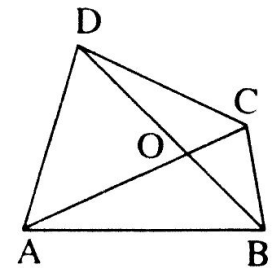
Thay (6) vào (5) ta nhận được:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

Câu V. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCD} + S_{\triangle ODA} \\ &= \frac{1}{2}OA \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot \sin(180^\circ - \alpha) + \\ &\quad + \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}OD \cdot OA \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \\ &= \frac{1}{2}(OA + OC) \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}(OC + OA) \cdot OD \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot OB \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2}AC \cdot OD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}AC \cdot (OB + OD) \cdot \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$



ĐỀ SỐ 28

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Với $m = 0$ ta được:

$$(P_0): y = x^2 + 2x - 3$$

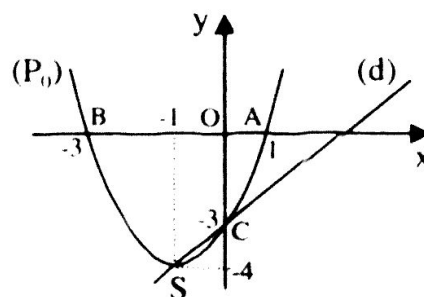
Ta lần lượt tính:

$$-\frac{b}{2a} = -1 \text{ và } -\frac{\Delta}{4a} = -4.$$

Vậy, đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh $S(-1, -4)$, nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$



Đồ thị: ta lấy thêm vài điểm trên đồ thị $A(1, 0)$, $B(-3, 0)$, $C(0, -3)$.

Từ đồ thị suy ra:

- $y \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 1 \end{cases}$
- $y \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Giả sử phương trình đường thẳng (d) có dạng:

$$(d): Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 > 0. \quad (1)$$

Vì $S(-1, -4)$ và $C(0, -3)$ thuộc (d), ta được:

$$\begin{cases} -A - 4B + C = 0 \\ -3B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -A - 4B + 3B = 0 \\ C = 3B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B \\ C = 3B \end{cases}. \quad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$(d): -Bx + By + 3B = 0 \Leftrightarrow (d): x - y - 3 = 0.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Để (P_m) là Parabol, điều kiện là:

$$1 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1,$$

khi đó (P_m) có đỉnh $S_m(\frac{m-1}{m+1}, \frac{4}{m+1})$.

Để nhận được phương trình quỹ tích đỉnh của Parabol (P_m) khi m thay đổi, ta thực hiện việc khử m từ hệ:

$$\begin{cases} x = \frac{m-1}{m+1} \\ y = \frac{4}{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m-1}{m+1} \\ m = \frac{4-y}{y} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\frac{4-y}{y} - 1}{\frac{4-y}{y} + 1} \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0.$$

Vậy, quỹ tích đỉnh S_m là đường thẳng $(\Delta): 2x + y - 2 = 0$.

d. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua, khi đó:

$$y_0 = (1 + m)x_0^2 - 2(m - 1)x_0 + m - 3, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 - 2x_0 + 1)m + x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0, \text{ với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + 2x_0 - 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

Vậy, họ (P_m) luôn đi qua điểm cố định $M(1, 0)$.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B

Lời giải tự luận: Đặt $t = (x - 3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ suy ra $(x - 3)(x + 1) = t^2$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -1 \end{cases}$$

▪ Với $t = -3$, ta được:

$$\begin{aligned} (x - 3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x - 3)(x + 1) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{13}. \end{aligned}$$

▪ Với $t = -1$, ta được:

$$\begin{aligned} (x - 3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ (x - 3)(x + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy, phương trình có hai nghiệm $x = 1 - \sqrt{13}$ và $x = 1 - \sqrt{5}$.

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án A.

Lời giải tự luận: Kí hiệu các phương trình trong hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Điều kiện:

$$\begin{cases} x^2 + x + y + 1 \geq 0 \\ y^2 + x + y + 1 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Cộng tương ứng theo vế hai phương trình của hệ được:

$$\sqrt{x^2 + x + y + 1} + \sqrt{y^2 + x + y + 1} = 10. \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) được:

$$x + y = 8 \Leftrightarrow y = 8 - x. \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) được:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(8 - x)^2 + 9} &= 10 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 16x + 73} = 10 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 9) + (x^2 - 16x + 73) + 2\sqrt{(x^2 + 9)(x^2 - 16x + 73)} &= 100 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 + 9)(x^2 - 16x + 73)} &= 9 + 8x - x^2 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 4$.

Câu IV. Kí hiệu các hệ thức của câu a), b) theo thứ tự là (1) và (2).

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết ta nhận thấy:

$$\begin{cases} AB = 2AM \\ \overrightarrow{AB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2 \overrightarrow{AM}. \quad (3)$$

$$\begin{cases} AC = 3AN \\ \overrightarrow{AC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3 \overrightarrow{AN}. \quad (4)$$

Thay (3), (4) vào (1), ta được:

$$6 \overrightarrow{AM} + 6 \overrightarrow{AN} - 12 \overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

$\Leftrightarrow K$ là trung điểm MN .

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} \stackrel{(1)}{=} \overrightarrow{AD} - \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} \right). \quad (5)$$

Thay (5) vào (2), ta được:

$$3 \overrightarrow{AB} + 4 \overrightarrow{AC} - 12 \left[\overrightarrow{AD} - \left(\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} \right) \right] = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow D \text{ là trung điểm } BC.$$

Câu V. Kí hiệu hai phương trình theo thứ tự là (1) và (2).

Gọi $\Delta_{(1)}$, $\Delta_{(2)}$ theo thứ tự là biệt số của phương trình (1) và (2), ta có:

$$\Delta_{(1)} = a^2 - 4b \quad \Delta_{(2)} = c^2 - 4d.$$

Nhận xét rằng:

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} &= a^2 - 4b + c^2 - 4d \\ &= (a^2 + c^2) - 4(b + d) \geq 2ac - 4(b + d) \geq 4(b + d) - 4(b + d) = 0. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_{(1)} + \Delta_{(2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Ít nhất một trong hai } \Delta_{(1)}, \Delta_{(2)} \text{ không âm}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ít nhất một trong hai phương trình có nghiệm, đpcm.}$$

ĐỀ SỐ 29

Câu I.

a. Với $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ và $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c)}{x_1 - x_2} \\ &= a(x_1 + x_2) + b = a\left(x_1 + x_2 + \frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Khi đó:

1. Với $a > 0$ thì:

- Nếu $x_1, x_2 > -\frac{b}{2a}$ thì $A > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < -\frac{b}{2a}$ thì $A < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty, -\frac{b}{2a})$.

2. Với $a < 0$ thì:

- Nếu $x_1, x_2 > -\frac{b}{2a}$ thì $A < 0$, suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$.
- Nếu $x_1, x_2 < -\frac{b}{2a}$ thì $A > 0$, suy ra hàm số đồng biến trên $(-\infty, -\frac{b}{2a})$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Giả sử Parabol (P) có phương trình:

$$(P): y = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Vì A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = 9 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = 6 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy, Parabol (P) có phương trình $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án C.

Lời giải tự luận: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$, điều kiện $t \geq 0$.

Khi đó, phương trình có dạng:

$$2(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \text{ và } t = 1.$$

- Với $t = 1$, ta được :

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5}.$$

Vậy, phương trình có nghiệm là $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Câu III. Trừ từng vế hệ phương trình, ta được:

$$x - y = -(x^2 - y^2) + (x - y) \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}.$$

Khi đó hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \end{cases} \quad (I) \text{ hoặc } \begin{cases} x = -y \\ x^2 + m = 0 \end{cases} \quad (II)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với $m = 0$, ta được :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{cases} \text{ và } (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Vậy, với $m = 0$ hệ có hai cặp nghiệm là $(0, 0)$ và $(2, 2)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Điều kiện cần: Nhận xét rằng: nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì cũng có nghiệm (y_0, x_0) , do đó hệ có nghiệm duy nhất thì

$$x_0 = y_0.$$

Khi đó:

$$(*) \Leftrightarrow x_0 = x_0^2 - x_0 + m \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + m = 0. \quad (3)$$

Do x_0 duy nhất nên phương trình (3) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta'_{(3)} = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, hệ có dạng:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \xrightarrow{+} x + y = y^2 - y + 1 + x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Nghiệm thỏa mãn hệ và là nghiệm duy nhất.

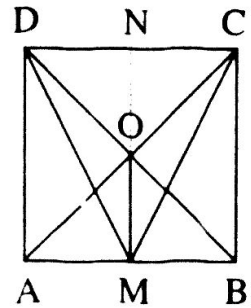
Vậy, với $m = 1$ hệ có nghiệm duy nhất.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Trong $\triangle MCD$, ta có:

$$\begin{aligned} 2R_{\triangle MCD} &= \frac{MC}{\sin \widehat{MDC}} = \frac{MC}{\frac{MN}{DM}} = \frac{MC^2}{MN} \\ &= \frac{BC^2 + BM^2}{MN} = \frac{a^2 + \frac{a^2}{4}}{a} = \frac{5a}{4} \\ \Leftrightarrow R_{\triangle MCD} &= \frac{5a}{8} \end{aligned}$$



b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Trong $\triangle MBD$, ta có:

$$2R_{\triangle MBD} = \frac{MD}{\sin \widehat{MBD}} = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sin 45^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow R_{\triangle MBD} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Trong $\triangle MOC$, ta có:

$$2R_{\triangle MOC} = \frac{MC}{\sin \widehat{MOC}} = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{\sin 135^\circ} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow R_{\triangle MOC} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Câu V. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, ta được:

$$2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \quad (1)$$

Bình phương hai vế của (1), ta được:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC})^2 &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})^2 \\ \Leftrightarrow MA^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= MB^2 + MD^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OB}) \\ \Leftrightarrow OA^2 &= OB^2 \Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow ABCD \text{ là hình chữ nhật.} \end{aligned}$$

ĐỀ SỐ 30

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hàm số xác định trên $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng, ta có:

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)-3} - \sqrt[3]{(-x)+3} = -\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x-3} = f(x).$$

Vậy, hàm số là chẵn.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử Parabol (P) có phương trình:

$$(P): y = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Vì (P) có đỉnh $S(1, 5)$ và đi qua điểm $A(-1, 1)$, ta được:

$$\begin{cases} 1 = -\frac{b}{2a} \\ 5 = -\frac{\Delta}{4a} \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ 20a = -(b^2 - 4ac) \\ c = 1 - 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 1 - 3a \\ a^2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}.$$

Vậy Parabol (P) có phương trình $y = -x^2 + 2x + 4$.

Câu II. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m = 0$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, \text{ tức là phương trình có nghiệm.}$$

Trường hợp 2: Với $m \neq 0$, ta có:

$$\Delta' = (m+1)^2 - m(m+2) = 1 > 0, \forall m \neq 0 \Rightarrow (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt.}$$

Vậy, với mọi m phương trình luôn có nghiệm.

Chú ý: Nếu biết nhận xét:

$$a + b + c = m - 2(m+1) + m + 2 = 0$$

suy ra ngay với mọi m phương trình luôn có nghiệm $x = 1$, khi đó ta nhận được lời giải đơn giản.

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Kí hiệu hệ là (I) và các phương trình trong hệ theo thứ tự là (1), (2) và (3).

Xét hệ phương trình tạo bởi (2) và (3):

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases} \quad (II)$$

Ta có $D = 1 - m$, $D_x = 1 - m^2$, $D_y = m - 1$.

Trường hợp 1: Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó, hệ (II) có nghiệm duy nhất $x = 1 + m$ và $y = -1$.

Nghiệm trên thoả mãn (1)

$$\Leftrightarrow m(1 + m) - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (1)} \\ m = -2 \end{cases}.$$

Trường hợp 2: Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó hệ (I) có dạng:

$$x + y = 1, \text{ có vô số nghiệm.}$$

Vậy, với $m = 1$ hoặc $m = -2$ hệ có nghiệm.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Vì (1) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với $M \equiv I$, khi đó:

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{II} = \vec{0}. \quad (1.1)$$

▪ Từ (1.1), ta được:

$$2\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{xác định được điểm I.}$$

▪ Từ (1.1), ta được:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2 + 1)\overrightarrow{MI} = 3\overrightarrow{MI}. \quad (1.2)$$

Từ (1) và (1.2), suy ra:

$$3\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow k = 3.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Vì (2) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với $M \equiv J$, khi đó:

$$\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} = k\overrightarrow{JJ} = \vec{0}. \quad (2.1)$$

▪ Gọi E là trung điểm AB, từ (2.1), ta được:

$$2\overrightarrow{JE} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow J \text{ là trung điểm của CE.}$$

▪ Từ (2.1), ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1 + 1 + 2)\overrightarrow{MJ} = 4\overrightarrow{MJ}. \quad (2.2)$$

Từ (2) và (2.2), suy ra:

$$4\overrightarrow{MJ} = k\overrightarrow{MJ} \Leftrightarrow k = 4.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Vì (3) thoả mãn với mọi điểm M, do đó đúng với $M \equiv K$, khi đó:

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = k\overrightarrow{KK} = \vec{0}. \quad (3.1)$$

▪ Gọi G là trọng tâm ΔABC , từ (3.1), ta được:

$$3\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow K \text{ là trung điểm của GD.}$$

▪ Từ (3.1), ta được:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MK}. \quad (3.2)$$

Từ (3) và (3.2), suy ra $6\overrightarrow{MK} = k\overrightarrow{MK} \Leftrightarrow k = 6$.

Chú ý: Bài toán tìm điểm có thể được mở rộng thành bài toán tìm tập hợp điểm (quỹ tích). Với các bài toán quỹ tích ta cần nhớ rằng:

1. Nếu $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, với A, B cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.
2. $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$, với A, B, C cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.AB$.
3. Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, với A, B, C cho trước thì :
 - a. Với $k \in \mathbb{R}$, điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.
 - b. Với $k \in \mathbb{R}^+$, điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC theo hướng $\overrightarrow{BC}$.
 - c. Với $k \in \mathbb{R}^-$, điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.

Câu V. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Phương trình có nghiệm nguyên khi

$$\Delta = 4a^2 + 16a - 151$$

là số chính phương, tức là:

$$4a^2 + 16a - 151 = k^2 \text{ với } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (2a + 4)^2 - k^2 = 167 \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow (2a + 4 + k)(2a + 4 - k) = 167 \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Vì 167 là số nguyên tố, nên:

$$\begin{cases} 2a + 4 + k = 1 \\ 2a + 4 - k = 167 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} 2a + 4 + k = -1 \\ 2a + 4 - k = -167 \end{cases} \quad (II)$$

- Xét hệ (I), suy ra:

$$4a + 8 = 168 \Leftrightarrow a = 40 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 83 \end{cases}$$

- Xét hệ (II), suy ra:

$$4a + 8 = -168 \Leftrightarrow a = -44 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -84 \end{cases}$$

Vậy tồn tại hai giá trị $a = 40$ và $a = -44$ để phương trình có nghiệm nguyên.

ĐỀ SỐ 31

Câu I.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x})^2}{(\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x})(\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x})} \\ &= \frac{1 + \sin 2x + 2\sqrt{1 - \sin^2 2x} + 1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x - 1 + \sin 2x} \\ &= \frac{1 + \sqrt{\cos^2 2x}}{\sin 2x} = \frac{1 + |\cos 2x|}{\sin 2x} \stackrel{-\frac{\pi}{4} < x < 0}{=} \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} \\ &= \cot x. \end{aligned}$$

Chú ý: Người ta có thể sử dụng kết quả của ví dụ trên để tạo ra những yêu cầu khá thú vị, để minh họa ta xét đòi hỏi:

$$\text{Cho } t \in [-1, 1] \setminus \{0\} \text{ và thỏa mãn } \tan x = \frac{\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}. \text{ Chứng minh rằng } t = \sin 2x.$$

Ta thực hiện như sau:

Trước hết:

$$\tan x = \frac{(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t})^2}{(\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t})(\sqrt{1+t} + \sqrt{1-t})} = \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t}.$$

Mặt khác:

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t}}{1 + \left(\frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} \right)^2} = \frac{2(1 + \sqrt{1-t^2})t}{2(1 + \sqrt{1-t^2})} = t.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$A = (1 - 2\sin^2 x) - a \cdot \sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) = (-4 - a)\sin^2 x + 3$$

Vậy để A không phụ thuộc x, điều kiện là:

$$-a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -4.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Để bất phương trình vô nghiệm, điều kiện là:

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Để bất phương trình có đúng một nghiệm, điều kiện là:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Để bất phương trình có nghiệm là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 2 thì tam thức ở vế trái của bất phương trình phải có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thoả mãn $|x_1 - x_2| = 2$, tức là:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ \sqrt{1 - m} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

b. Ta có:

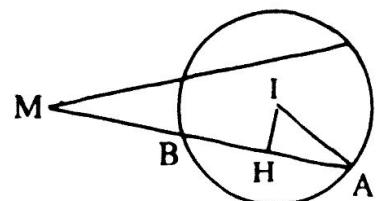
$$\mathcal{P}_{MC} = (6 - 1)^2 + (2 - 2)^2 - 5 = 20 > 0 \Leftrightarrow M \text{ nằm ngoài đường tròn.}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên AB, ta có:

$$IH^2 = IA^2 - AH^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4} = 5 - \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow IH = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$



Đường thẳng (d) đi qua M có dạng:

$$(d): A(x - 6) + B(y - 2) = 0 \Leftrightarrow (d): Ax + By - 6A - 2B = 0.$$

Đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện đầu bài khi và chỉ khi:

$$d(I, (d)) = IH \Leftrightarrow \frac{|A + 2B - 6A - 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 9A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm 3B.$$

- Với $A = -3B$, ta được $(d_1): x - 3y = 0$.
- Với $A = 3B$, ta được $(d_2): x + 3y - 12 = 0$.

Vậy ôn tại hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

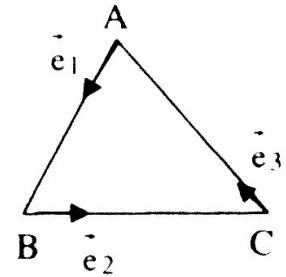
Câu IV. Lấy ba vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ trên ba cạnh AB, BC, CA, ta có:

$$(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 + 1 + 1 + 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2(-\cos B - \cos C - \cos A) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}, \text{ đpcm.}$$



Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đồng dạng với tam giác có các cạnh là các vectơ đơn vị $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

ĐỀ SỐ 32

Câu I.

a. Từ giả thiết $a \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ta được:

$$\frac{1}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \cos \frac{a}{2} \neq 0$$

Nhân cả hai vế của biểu thức với $2\cos \frac{a}{2} \neq 0$, ta được:

$$\begin{aligned} 2A \cos \frac{a}{2} &= 2\sin \frac{5a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} - 10\cos^3 a \cdot \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} = \sin 3a + \sin 2a - 5\cos^3 a \cdot \sin a \\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a + 2\sin a \cdot \cos a - 5\cos^3 a \cdot \sin a \\ &= (3 - 4\sin^2 a + 2\cos a - 5\cos^3 a) \cdot \sin a = -(5\cos^3 a - 4\cos^2 a - 2\cos a + 1) \cdot \sin a \\ &= -2(5\cos^2 a + \cos a - 1)(\cos a - 1) \sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \\ \Leftrightarrow A &= (5\cos^2 a + \cos a - 1)(1 - \cos a) \sin \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải ự luận: Ta biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= [\cos x + \cos(x + 5a)] + [\cos(x + a) + \cos(x + 4a)] + \\ &\quad + [\cos(x + 2a) + \cos(x + 3a)] \\ &= 2\cos(x + \frac{5a}{2}) \cdot \cos \frac{5a}{2} + 2\cos(x + \frac{5a}{2}) \cdot \cos \frac{3a}{2} + 2\cos(x + \frac{5a}{2}) \cdot \cos \frac{a}{2} \\ &= 2\cos(x + \frac{5a}{2}) \cdot [\cos \frac{5a}{2} + \cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{a}{2}] \\ &= 2\cos(x + \frac{5a}{2}) \cdot [2\cos \frac{3a}{2} \cdot \cos a + \cos \frac{3a}{2}] = 2\cos(x + \frac{5a}{2}) \cdot (2\cos a + 1) \cdot \cos \frac{3a}{2} \end{aligned}$$

Do đó để Δ độc lập đối với x điều kiện là:

$$\begin{cases} 2\cos a + 1 = 0 & 0 < a < \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{3a}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy, với $a = \frac{\pi}{3}$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Viết lại các bất phương trình dưới dạng:

$$(m-1)x > m-3, \quad (1)$$

$$(m+1)x > m-2. \quad (2)$$

Ta đi xét các trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m = 1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 0x > -2, \text{ luôn đúng.}$$

$$(2) \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 2: Nếu $m = -1$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x < 2.$$

$$(2) \Leftrightarrow 0x > -3, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, (1) và (2) không tương đương.

Trường hợp 3: Nếu $m \neq \pm 1$ thì:

Khi đó, để (1) và (2) tương đương điều kiện là:

$$\begin{cases} m+1 > 0 \\ \frac{m-3}{m-1} = \frac{m-2}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m+1) > 0 \\ m^2 - 2m - 3 = m^2 - 3m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy, với $m = 5$, hai bất phương trình tương đương với nhau.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m = 0$, khi đó:

$$f(x) = 4x - 3, \text{ do đó không thể có } f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai nên để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, điều kiện là:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 0 \\ 4 - m \leq 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, không tồn tại m để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta có thể thực hiện theo các cách sau:

Cách 1. Để có được phương trình các cạnh của $\triangle ABC$ ta đi xác định tọa độ điểm B, C.

Gc A' là điểm đối xứng với A qua trọng tâm G của $\triangle ABC$, khi đó:

$$\begin{cases} A'B \parallel (d_1) \\ A'C \parallel (d_2) \end{cases}$$

Suy ra:

Điểm B là giao điểm của $(A'B)$ và (d_2) .

Điểm C là giao điểm của $(A'C)$ và (d_1) .

Vậy ta lần lượt thực hiện theo các bước sau:

- Gc G là trọng tâm $\triangle ABC$, khi đó tọa độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1, 1).$$

- Điểm A' là điểm đối xứng với A qua G, tọa độ của A' được cho bởi:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_G - x_A \\ y_{A'} = 2y_G - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(1, -1).$$

- Tọa độ điểm B.

Phương trình đường thẳng $(A'B)$ được xác định bởi:

$$\begin{aligned} (A'B): \begin{cases} \text{qua } A' \\ (A'B) \parallel (d_1) \end{cases} &\Leftrightarrow (A'B): \begin{cases} \text{qua } A'(1, -1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{CG}(2, 1) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (A'B): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} \Leftrightarrow (A'B): x - 2y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Điểm $\{B\} = (A'B) \cap (d_2)$, tọa độ điểm B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5, 1).$$

- Tương tự, ta có tọa độ điểm $C(-3, -1)$.
- Phương trình cạnh AC, được xác định bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(1, 3) \\ \text{qua } C(-3, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): \frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow (AC): x - y + 2 = 0.$$

- Tương tự, ta có:

Phương trình cạnh AB là: $x + 2y - 7 = 0$.

Phương trình cạnh BC là: $x - 4y - 1 = 0$.

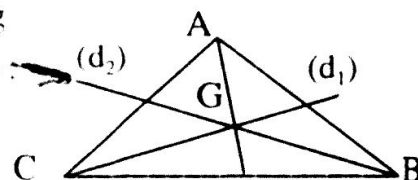
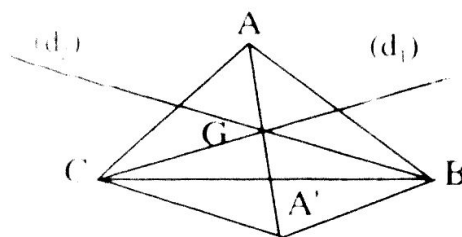
Vậy, phương trình ba cạnh của $\triangle ABC$ là:

$$(AB): x + 2y - 7 = 0, \quad (BC): x - 4y - 1 = 0, \quad (AC): x - y + 2 = 0.$$

Cách 2 Sử dụng phương trình tham số của đường thẳng

Gọi $(d_1): x - 2y + 1 = 0$ là trung tuyến đỉnh C, ta có:

$$(d_1): \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \Rightarrow C(2t - 1, t).$$



Gọi $(d_2): y - 1 = 0$ là trung tuyến đỉnh B, ta có :

$$(d_2): \begin{cases} x = u \\ y = 1 \end{cases}, u \in \mathbf{R} \Rightarrow B(u, 1).$$

Gọi G là trọng tâm ΔABC , khi đó tọa độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1, 1).$$

Ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + u + 2t - 1 = 3 \\ 3 + 1 + t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ u = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B(5, 1) \\ C(-3, -1) \end{cases}.$$

Khi đó:

- Phương trình cạnh (AB), được cho bởi:

$$(AB): \begin{cases} \text{qua } A(1, 3) \\ \text{qua } B(5, 1) \end{cases} \Leftrightarrow (AB): x + 2y - 7 = 0.$$

- Phương trình cạnh (AC), được cho bởi:

$$(AC): \begin{cases} \text{qua } A(1, 3) \\ \text{qua } C(-3, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (AC): x - y + 2 = 0.$$

- Phương trình cạnh (BC), được cho bởi:

$$(BC): \begin{cases} \text{qua } B(5, 1) \\ \text{qua } C(-3, -1) \end{cases} \Leftrightarrow (BC): x - 4y - 1 = 0.$$

Vậy, phương trình các cạnh của ΔABC là:

$$(AB): x + 2y - 7 = 0, (AC): x - y + 2 = 0, (BC): x - 4y - 1 = 0.$$

Câu IV. Biến đổi tương đương bất đẳng thức về dạng:

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left[\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \right] &\leq 3(a^2+b^2+c^2) \\ \Leftrightarrow \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} &\leq a^2+b^2+c^2 \\ \Leftrightarrow c^2 - \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + a^2 - \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} + b^2 - \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ac(c-a)}{a+b} + \frac{bc(c-b)}{a+b} + \frac{ab(a-b)}{b+c} + \frac{ac(a-c)}{b+c} &+ \\ &+ \frac{ab(b-a)}{c+a} + \frac{bc(b-c)}{c+a} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{ac(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc(c-b)^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{ab(b-a)^2}{(c+a)(b+c)} &\geq 0, \text{ đúng.} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

ĐỀ SỐ 33

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= \sin^3 a + \cos^3 a - (\cos^2 a - \sin^2 a) = (\sin a + \cos a)(1 - \sin a \cos a + \sin a - \cos a) \\ &= (\sin a + \cos a)(1 + \sin a)(1 - \cos a) \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= 4 \left\{ \frac{1}{4} (1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4} \left[1 + \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 \right\} - 3 \\ &= (1 - \cos 2x)^2 + (1 - \sin 2x)^2 - 3 = 3 - 2(\cos 2x + \sin 2x) - 3 = -2\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Suy ra với $x = \frac{\pi}{8}$, ta được:

$$A = -2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) = -2\sqrt{2}.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$(m^2 - 1)x - (m^2 - 4m + 3) < 0. \quad (1)$$

Khi đó, bất phương trình vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -(m^2 - 4m + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ 1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ bất phương trình vô nghiệm:

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Kí hiệu bất phương trình là (1).

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $m = 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow -4x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0$ thì để (1) có nghiệm điều kiện là:

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4(m + 1)^2 - m(3m + 13) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \geq 0.$$

Ta có:

$$m^2 - 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1 \text{ và } m_2 = 4.$$

Bảng xét dấu:

m	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
Δ'		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra điều kiện để phương trình có nghiệm là:

$$m \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty).$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ phương trình có nghiệm.

Câu III. Từ giả thiết, ta được:

$$(d): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

$$\text{Vì } M \in (d) \text{ nên } \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1. \quad (1)$$

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có, diện tích ΔOAB được cho bởi:

$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{ab}{2}.$$

Từ (1) suy ra:

$$1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \geq 2 \sqrt{\frac{4}{a} \cdot \frac{1}{b}} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8.$$

Vậy $S_{\min} = 8$, đạt được khi:

$$\frac{4}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 2 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d): $x + 4y - 8 = 0$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ (1), ta được:

$$a = \frac{4b}{b-1} \Rightarrow \text{điều kiện } b > 1.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} OA + OB &= \frac{4b}{b-1} + b = \frac{4}{b-1} + b + 4 \\ &= \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \geq 2 \sqrt{\frac{4}{b-1} \cdot (b-1)} + 5 = 9. \end{aligned}$$

Vậy $(OA + OB)_{\min} = 9$, đạt được khi:

$$\frac{4}{b-1} = b-1 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d): $x + 2y - 6 = 0$.

Chú ý: Sai lầm thường gặp của học sinh là dùng lập luận:

$$OA + OB = a + b \geq 2\sqrt{ab} \geq 8.$$

Khi đó $(OA + OB)_{\min} = 8$ đạt được khi

$$a = b \xrightarrow{(1)} a = b = 5.$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Nhận xét rằng:

$$(4^2 + 1^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}.$$

Vậy $(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2})_{\min} = \frac{1}{17}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \\ 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 17 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d): $4x + 2y - 17 = 0$.

Câu IV. Chúng ta chứng minh bất đẳng thức ở đầu bài bằng phương pháp quy nạp toán học.

- Với $n = 2$, đặt:

$$2x = b + c - a > 0; 2y = a - b + c > 0; 2z = a + b - c > 0.$$

Suy ra:

$$a = y + z, b = z + x, c = x + y$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 - xyz(x + y + z) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow xyz \left[\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - (x + y + z) \right] \geq 0 \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các số dương, ta có:

$$y + \frac{x^2}{y} \geq 2\sqrt{y \frac{x^2}{y}} = 2x.$$

Tương tự:

$$x + \frac{z^2}{x} \geq 2z \text{ và } z + \frac{y^2}{z} \geq 2y.$$

Từ đó bất đẳng thức (*) được chứng minh, hay bất đẳng thức:

$$a^n b(a - b) + b^n c(b - c) + c^n a(c - a) \geq 0.$$

được chứng minh.

- Giả sử bất đẳng thức đúng tới n . Không mất tính tổng quát, ta giả sử $c \leq b \leq a$. Theo giả thiết quy nạp, ta có:

$$b^n c(b - c) \geq -a^n b(a - b) - c^n a(c - a)$$

$$\Rightarrow b^{n+1} c(b - c) \geq -a^n b^2(a - b) - c^n ab(c - a)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} & a^{n+1} b(a - b) + b^{n+1} c(b - c) + c^{n+1} a(c - a) \\ & \geq a^{n+1} b(a - b) - a^n b^2(a - b) - c^n ab(c - a) + c^{n+1} a(c - a) \\ & = a^n b(a - b)^2 + c^n a(c - a)(c - b) \geq 0. \end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $n > 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$a = b = c \text{ hay } \Delta ABC \text{ đều.}$$

ĐỀ SỐ 34

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= 4\sin 2a - 3\cos 2a - 12\sin a + 3 - 6\sin^2 a \\ &= 4\sin 2a - 3(1 - 2\sin^2 a) - 12\sin a + 3 - 6\sin^2 a \\ &= 8\sin a \cdot \cos a - 12\sin a = 4(2\cos a - 3)\sin a \end{aligned}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên khi chuyển biểu thức về dạng đơn, ta lựa chọn phép biến đổi $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ bởi khi đó sẽ khử được số hạng tự do và cùng với nhận xét các toán tử còn lại đều chứa $\sin a$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$2 + 2\cos x = 2(1 + \cos x) = 4\cos^2 \frac{x}{2}$$

suy ra:

$$\sqrt{2 + 2\cos x} = \sqrt{4\cos^2 \frac{x}{2}} \stackrel{0 \leq x \leq \pi}{=} 2\cos \frac{x}{2}$$

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos x}}}_{2 \text{ dấu căn}} = 2\cos \frac{x}{2^2}$$

...

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2 + 2\cos x}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2\cos \frac{x}{2^n}.$$

Vậy, ta được:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2\cos \frac{x}{2^n} = \cos \frac{x}{2^n}.$$

Suy ra với $x = 0$, ta được:

$$A = \cos 0 = 1.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Đặt $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$ và nhận thấy $x = -2$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, do đó biến đổi bất phương trình về dạng:

$$(x + 2)(x^2 - x + 1) > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ \sqrt{2x + 1} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq 2x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \neq 0. \quad (*)$$

Trục căn thức, ta biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{2x + 1} + 1 > 2x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 1} > 2x + 1 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 2x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0.$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\frac{1}{2}, 0)$.

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Với mỗi điểm $M(x, y) \in (d_1) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ nhận I làm trung điểm, ta được:

$$\begin{cases} x + x_0 = 2 \\ y + y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 - x \\ y_0 = 2 - y \end{cases} \quad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$(2 - x) - 2(2 - y) + 2 = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0.$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1) .

Chú ý: Đòi hỏi trên của bài toán cũng có thể được thực hiện bởi nhận xét thông thường, cụ thể:

Lấy một điểm $A(0, 1) \in (d)$, gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua I suy ra $A_1(2, 1)$.

- Vì $(d_1) \parallel (d) \Rightarrow (d): x - 2y + C = 0$.
- Vì $A_1 \in (d_1) \Rightarrow C = 0$.

Vậy phương trình đường thẳng $(d_1): x - 2y = 0$.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Vì hai tiêu điểm F_1 và F_2 thuộc Ox và đối xứng qua Oy nên Elíp có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b \quad (1)$$

- Tiêu cự $c = 4 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 4^2 \quad (2)$
- Điểm $A(0, 3) \in (E) \Leftrightarrow b^2 = 9 \quad (3)$
- Từ (2), (3) suy ra $a^2 = 25, b^2 = 9$.

Vậy phương trình Elíp (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Giả sử $M(x_0, y_0) \in (E)$ sao cho $MF_2 = 2MF_1$, ta có hai cách thực hiện:

Cách 1: Áp dụng công thức:

$$MF_1 = a + \frac{cx_0}{a} = 5 + \frac{4x_0}{5}, \quad MF_2 = a - \frac{cx_0}{a} = 5 - \frac{4x_0}{5}.$$

Từ đó

$$MF_1 = 9MF_2 \Leftrightarrow 5 + \frac{4x_0}{5} = 9\left(5 - \frac{4x_0}{5}\right) \Leftrightarrow x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = 0.$$

Vậy điểm $M(5, 0)$.

Cách 2: Từ giả thiết $MF_1 = 9MF_2$ và theo định nghĩa

$$MF_1 + MF_2 = 2a,$$

suy ra

$$\begin{aligned} 10MF_2 &= 2a \Leftrightarrow 100MF_2^2 = 4a^2 \\ \Leftrightarrow 100[(4 - x_0)^2 + y_0^2] &= 4.25 \Leftrightarrow (4 - x_0)^2 + y_0^2 = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

Mặt khác $M(x_0, y_0) \in (E)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 1 \quad (5)$$

Giải hệ tạo bởi (3), (4), ta được $M(5, 0)$.

Câu V. Ta viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$|(2x - 1) + 2| \leq |2x - 1| + |2|, \text{ luôn đúng.}$$

Vậy, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x .

ĐỀ SỐ 35

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= 2\sin 3a - 3(\sin 5a - \sin 3a) = 2(3\sin a - 4\sin^3 a) - 6\cos 4a \cdot \sin a \\ &= 2(3 - 4\sin^2 a - 3\cos 4a) \cdot \sin a \\ &= 2[3 - 2(1 - \cos 2a) - 3(2\cos^2 2a - 1)] \cdot \sin a \\ &= -2(6\cos^2 2a - 2\cos 2a - 4) \cdot \sin a = -4(3\cos 2a + 2)(\cos 2a - 1) \cdot \sin a. \end{aligned}$$

Chú ý: Các em học sinh cũng có thể sử dụng phương pháp tách dần:

$$\begin{aligned} \sin 3a &= 3\sin a - 4\sin^3 a, \\ \sin 5a &= \sin(a + 4a) = \sin a \cdot \cos 4a + \cos a \cdot \sin 4a \\ &= \sin a \cdot \cos 4a + 2\cos a \cdot \cos 2a \cdot \sin 2a = \sin a \cdot \cos 4a + 4\cos^2 a \cdot \cos 2a \cdot \sin a. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{48} + \cos^2 \frac{\pi}{48}\right)^3 - 3\sin^2 \frac{\pi}{48} \cdot \cos^2 \frac{\pi}{48} \cdot \left(\sin^2 \frac{\pi}{48} + \cos^2 \frac{\pi}{48}\right) \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 \frac{\pi}{24} = 1 - \frac{3}{8} \left(1 - \cos \frac{\pi}{12}\right) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos \frac{\pi}{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$A = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{20 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{32}.$$

Nhận xét: Như vậy trong lời giải trên để tính giá trị của biểu thức trước hết chúng ta thực hiện việc hạ bậc cho biểu thức dựa trên hằng đẳng thức:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

Bước tiếp theo sử dụng công thức nhân $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$, rồi tiếp tục hạ bậc để nhận được:

$$A = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos \frac{\pi}{12}.$$

Đến đây, để tính giá trị của $\cos \frac{\pi}{12}$, chúng ta đã sử dụng công thức cộng.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Hệ bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x > -4/3 \\ -\frac{3}{2} \leq x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x \leq -1.$$

Vậy, tập nghiệm của hệ bất phương trình là $T = (-\frac{4}{3}, -1]$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Lập bảng xét dấu hai biểu thức $x^2 - x$ và $2x - 4$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	-	+	+
$2x - 4$	-	-	-	0	+

Trường hợp 1: Với $x \leq 0$ hoặc $1 \leq x \leq 2$, phương trình có dạng:

$$x^2 - x - (2x - 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5}) \text{ (loại)}.$$

Trường hợp 2: Với $0 < x < 1$, phương trình có dạng:

$$-(x^2 - x) - (2x - 4) = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Trường hợp 3: Với $x \geq 2$, phương trình có dạng:

$$x^2 - x + 2x - 4 = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0 \quad \begin{matrix} x \geq 2 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} x_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$$

Vậy, phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{29} - 1}{2}$.

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Với mỗi điểm $M(x, y) \in (d_1) \Rightarrow$ tồn tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ sao cho:

$$\begin{cases} \text{trung điểm I của } MM_0 \text{ thuộc } (\Delta) \\ MM_0 \perp (\Delta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x_0}{2} - \frac{y+y_0}{2} = 0 \\ 1(x-x_0) + 1(y-y_0) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = y \\ y_0 = x \end{cases} \quad (I)$$

Thay (I) vào phương trình của (d), ta được:

$$4y - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 3 = 0.$$

Đó chính là phương trình đường thẳng (d_1) .

Chú ý: Đòi hỏi trên của bài toán cũng có thể được thực hiện bởi nhận xét thông thường, cụ thể:

Ta xét hai khả năng sau:

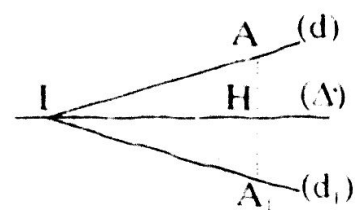
Khả năng 1: Nếu $(d) \cap (\Delta) = \{I\}$, thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định tọa độ giao điểm I.

Bước 2: Lấy một điểm $A \in (d)$, từ đó xác định tọa độ điểm A_1 đối xứng với A qua (Δ) .

Bước 3: Đường thẳng (d_1) qua I và A_1 .

$$(d_1): \begin{cases} \text{qua I} \\ \text{qua } A_1 \end{cases}$$



Khả năng 2: Nếu $(d) \parallel (\Delta)$, thực hiện theo các bước:

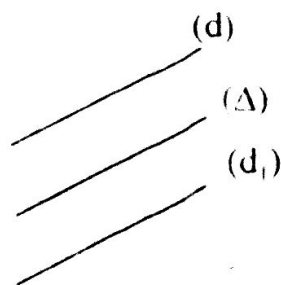
Bước 1: Viết lại phương trình của (d) , (Δ) dưới dạng:

$$(d): Ax + By + C_d = 0, (\Delta): Ax + By + C_\Delta = 0.$$

Bước 2: Khi đó:

$$(d_1): Ax + By + C = 0$$

$$\text{với } C \text{ được xác định bởi } C_\Delta = \frac{1}{2}(C_d + C).$$



b. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\text{Vì } A \in (E) \Leftrightarrow \frac{400}{41a^2} + \frac{400}{41b^2} = 1 \Leftrightarrow 400(a^2 + b^2) = 41a^2b^2. \quad (1)$$

$$\text{Elíp (E) có tiêu cự bằng 6} \Leftrightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3. \quad (2)$$

Tới đây ta xét hai khả năng có thể xảy ra:

Khả năng 1: Nếu $a > b$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 9. \quad (3)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (3), ta được $a^2 = 25$ và $b^2 = 16$, suy ra:

$$(E_1): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Khả năng 2: Nếu $a < b$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow b^2 - a^2 = 9. \quad (4)$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (1), (4), ta được $a^2 = 16$ và $b^2 = 25$, suy ra:

$$(E_2): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Biến đổi bất phương trình về dạng:

$$\sqrt{x-1} + x - 3 \geq \sqrt{2x^2 - 10x + 16}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$\sqrt{2[(x-1) + (x-3)]} \leq \sqrt{x-1} + x - 3.$$

Vậy bất phương trình tương đương với dấu "=" xảy ra, tức là

$$\sqrt{x-1} = x-3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

Vậy, bất phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = 5$.

ĐỀ SỐ 36

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= (2\sin a - 1) - (2\sin 2a - \cot a) = (2\sin a - 1) - \left(4\sin a \cdot \cos a - \frac{\cos a}{\sin a}\right) \\ &= (2\sin a - 1) - \frac{(4\sin^2 a - 1)\cos a}{\sin a} = \frac{(2\sin a - 1)[\sin a - (2\sin a + 1)\cos a]}{\sin a} \\ &= \frac{(2\sin a - 1)(\sin a - \cos a - 2\sin a \cdot \cos a)}{\sin a} \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 - \cos 146^\circ) + \frac{1}{2}(1 - \cos 94^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 26^\circ - \cos 120^\circ) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 146^\circ + \cos 94^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 26^\circ + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{3}{4} - \cos 120^\circ \cdot \cos 26^\circ - \frac{1}{2}\cos 26^\circ = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Kí hiệu hệ là (*).

Vì $x^2 + x + 1 > 0, \forall x$, nên ta biến đổi tương đương về dạng:

$$\begin{cases} 12x^2 - (m-9)x + 3 > 0 & (1) \\ 3x^2 + (m+6)x + 12 > 0 & (2) \end{cases}$$

Khi đó, để (*) đúng với mọi x điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-9)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 < 0 \\ (m+6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 21 \\ -18 < m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6.$$

Vậy, với $-3 < m < 6$ thoả mãn điều kiện đầu bài.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Kí hiệu các phương trình, bất phương trình trong hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Giải (1) ta được:

$$\begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$$

Vậy, hệ có nghiệm khi và chỉ khi x_1 hoặc x_2 thoả mãn (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 3x_1 - m^2 + 2m > 0 \\ x_2^2 - 3x_2 - m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - m^2 + 2m > 0 \\ (m+1)^2 - 3(m+1) - m^2 + 2m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \quad (*)$$

Vậy, với $m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ hệ có nghiệm.

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Đưa phương trình Hyperbol về dạng

$$(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4, b = 3 \text{ và } c = 5.$$

Từ đó:

- Tâm $O(0, 0)$.
- Toạ độ các đỉnh $A_1(-4, 0), A_2(4, 0)$.
- Toạ độ các tiêu điểm $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$.
- Tâm sai $e = \frac{5}{4}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận là $y = \pm \frac{3}{4}x$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Phương trình Hyperbol (H_1) liên hợp của (H) có dạng:

$$(H_1): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1.$$

Từ đó:

- Tâm $O(0, 0)$.
- Toạ độ các đỉnh $B_1(0, -3), B_2(0, 3)$.
- Toạ độ các tiêu điểm $F'_1(0, -5), F'_2(0, 5)$.
- Tâm sai $e = \frac{5}{3}$.
- Phương trình hai đường tiệm cận là $y = \pm \frac{3}{4}x$.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Đường tròn (C) thoả mãn

$$(C): \begin{cases} \text{Tâm I là trung điểm } F_1F_2 \\ \text{Bán kính } R = \frac{F_1F_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C): \begin{cases} \text{Tâm I}(0,0) \\ \text{Bán kính } R = 5 \end{cases} \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 = 25.$$

d. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Giả sử phương trình chính tắc của Elíp có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b. \quad (1)$$

$$\text{▪ Tiêu cự } c = 5 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 5^2 \quad (2)$$

- $P(4, 3)$ là một đỉnh của hình chữ nhật cơ sở của (H) Để Elíp (E) ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H)

$$\Leftrightarrow P(4, 3) \in (E) \Leftrightarrow 9a^2 + 16b^2 - a^2b^2 = 0 \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra $a^2 = 40, b^2 = 15$.

Vậy phương trình chính tắc (E) có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1.$$

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacópki ta có:

$$\begin{aligned} 1 &= (2x + 3y)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot y \sqrt{2} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2} \right) (3x^2 + 2y^2) = \frac{35}{6} (3x^2 + 2y^2) \\ \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 &\geq \frac{6}{35}. \end{aligned}$$

Vậy $(3x^2 + 2y^2)_{\min} = \frac{6}{35}$ đạt được khi:

$$x\sqrt{3} : \frac{2}{\sqrt{3}} = y\sqrt{2} : \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ \frac{3x}{2} = \frac{2y}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{35} \text{ và } y = \frac{9}{35}.$$

ĐỀ SỐ 37

Câu I.

a. Nếu đặt $t = 2$, ta được:

$$A = t^2 - (\tan a + \cos^2 a)t + \sin a \cdot \cos a.$$

khi đó A là một tam thức bậc hai có:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (\tan a + \cos^2 a)^2 - 4 \sin a \cdot \cos a = (\tan a + \cos^2 a)^2 - 4 \tan a \cdot \cos^2 a \\ &= (\tan a - \cos^2 a)^2, \end{aligned}$$

do đó phương trình $A = 0$ có các nghiệm:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\tan a + \cos^2 a + (\tan a - \cos^2 a)}{2} = \tan a \\ t_2 = \frac{\tan a + \cos^2 a - (\tan a - \cos^2 a)}{2} = \cos^2 a \end{cases}$$

tức là A có thể được phân tích thành:

$$A = (t - \tan a)(t - \cos^2 a) = (2 - \tan a)(2 - \cos^2 a).$$

Nhận xét: Lời giải trên minh họa cho ý tưởng của *phương pháp hằng số biến thiên*, lẽ đương nhiên chúng ta có thể thực hiện phép nhóm một cách thích hợp để có được các kết quả đó, cụ thể:

$$\begin{aligned} A &= \tan a \cdot \cos^2 a - 2 \tan a - 2 \cos^2 a + 4 \\ &= (\cos^2 a - 2) \tan a - 2(\cos^2 a - 2) = (\tan a - 2)(\cos^2 a - 2). \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a} \Rightarrow (\tan^3 a - 3 \tan a)^2 = (3 \tan^2 a - 1)^2 \cdot \tan^2 3a.$$

Với kết quả đó ta biến đổi A về dạng:

$$\begin{aligned} A &= (\tan^3 \frac{\pi}{9} - 3 \tan \frac{\pi}{9})^2 - 3(3 \tan^2 \frac{\pi}{9} - 1)^2 = (3 \tan^2 \frac{\pi}{9} - 1)^2 \cdot \tan^2 3 \cdot \frac{\pi}{9} - 3(3 \tan^2 \frac{\pi}{9} - 1)^2 \\ &= 3(3 \tan^2 \frac{\pi}{9} - 1)^2 - 3(3 \tan^2 \frac{\pi}{9} - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Kí hiệu hai bất phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Ta đi giải từng bất phương trình của hệ.

▪ Giải (1), ta được $x \leq \frac{2m-2}{3} \Rightarrow$ tập nghiệm của (1) là $T_1 = (-\infty, \frac{2m-2}{3}]$.

▪ Giải (2), bằng việc viết lại bất phương trình dưới dạng:

$$mx \leq 1 - m. \quad (3)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1. Với $m = 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow 0x \leq 1 \text{ luôn đúng} \Rightarrow \text{tập nghiệm của (2) là } T_2 = \mathbf{R}.$$

Khi đó, tập nghiệm của hệ là $T = T_1 \cap T_2 = T_1$, và không duy nhất.

Trường hợp 2. Với $m > 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow x \leq \frac{1-m}{m} \Rightarrow \text{tập nghiệm của (2) là } T_2 = (-\infty, \frac{1-m}{m}].$$

Khi đó, tập nghiệm của hệ là $T = T_1 \cap T_2 = (-\infty, \min\{\frac{2m-2}{3}, \frac{1-m}{m}\}]$, và không duy nhất.

Trường hợp 3. Với $m < 0$ thì:

$$(3) \Leftrightarrow x \geq \frac{1-m}{m} \Rightarrow \text{tập nghiệm của (2) là } T_2 = [\frac{1-m}{m}, +\infty).$$

Khi đó, để hệ có nghiệm duy nhất, điều kiện là:

$$\frac{2m-2}{3} = \frac{1-m}{m} \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (1)} \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy, hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\frac{3}{2}$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Câu III.

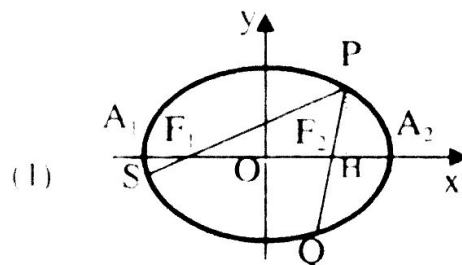
a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giả sử $P(x_P, y_P)$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của P lên Ox , khi đó:

$$\cos \alpha = \frac{F_1H}{F_1P} = \frac{x_P - c}{a - ex_P} = \frac{a(x_P - c)}{a^2 - cx_P} \Leftrightarrow x_P = \frac{a(a \cos \alpha + c)}{a + c \cos \alpha}$$

do đó:

$$\begin{aligned} F_2P &= a - \frac{c}{a} x_P = a - \frac{c}{a} \cdot \frac{a(a \cos \alpha + c)}{a + c \cos \alpha} \\ &= \frac{a^2 - c^2}{a + c \cos \alpha} = \frac{b^2}{a + c \cos \alpha} \end{aligned}$$



Bằng cách thay α bằng $\pi - \alpha$ vào (1), ta được:

$$F_2Q = \frac{b^2}{a + c \cos(\pi - \alpha)} = \frac{b^2}{a - c \cos \alpha}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có ngay:

$$\frac{1}{F_2P} + \frac{1}{F_2Q} = \frac{a + c \cos \alpha}{b^2} + \frac{a - c \cos \alpha}{b^2} = \frac{2a}{b^2}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$PQ = F_2P + F_2Q = \frac{b^2}{a + c \cos \alpha} + \frac{b^2}{a - c \cos \alpha} = \frac{2ab^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \alpha}$$

suy ra:

$$\begin{aligned} \bullet \quad PQ &\geq \frac{2ab^2}{a^2} = \frac{2b^2}{a} \text{ suy ra MinPQ} = \frac{2b^2}{a}, \text{ đạt được khi } \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \\ \bullet \quad PQ &\leq \frac{2ab^2}{a^2 - c^2} = 2a \text{ suy ra MaxPQ} = 2a, \text{ đạt được khi } \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \pi \\ \alpha = 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án C.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$3x + 2y = 6xy \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6,$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{\frac{3}{y}} \cdot \sqrt{y}$$

Do vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki, suy ra:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \leq \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)(x + y) = 6(x + y)$$

$$\Rightarrow x + y \geq \frac{1}{6} (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}$$

Vậy $(x + y)_{\min} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}$ đạt được khi:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6 \\ \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2 + \sqrt{6}}{6} \\ y = \frac{3 + \sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 33

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} B &= 2(\cos 3a + \cos a) \cdot \sin \frac{5a}{2} = 2\cos 3a \cdot \sin \frac{5a}{2} + \cos a \cdot \sin \frac{5a}{2} \\ &= \sin \frac{11a}{2} - \sin \frac{a}{2} + \sin \frac{7a}{2} + \sin \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Nhân cả hai vế của biểu thức với $64\sin \frac{\pi}{65}$, ta được:

$$\begin{aligned} 64A\sin \frac{\pi}{65} &= 64\sin \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} \\ &= 32\sin \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} \\ &= 16\sin \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} \\ &= 8\sin \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} = 4\sin \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} \\ &= 2\sin \frac{32\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65} = \sin \frac{64\pi}{65} = \sin(\pi - \frac{\pi}{65}) = \sin \frac{\pi}{65} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{64}.$$

Nhận xét: Nếu bài toán phát biểu lại dưới dạng:

"*Tính giá trị của biểu thức:*

$$A = \sin \frac{63\pi}{130} \cdot \sin \frac{61\pi}{130} \cdot \sin \frac{57\pi}{130} \cdot \cos \frac{49\pi}{130} \cdot \cos \frac{33\pi}{130} \cdot \cos \frac{\pi}{130}."$$

Khi đó chúng ta cần thực hiện ngay công việc chuyển đổi bằng công thức $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ để biến đổi A về dạng:

$$A = \cos \frac{\pi}{65} \cdot \cos \frac{2\pi}{65} \cdot \cos \frac{4\pi}{65} \cdot \cos \frac{8\pi}{65} \cdot \cos \frac{16\pi}{65} \cdot \cos \frac{32\pi}{65}.$$

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giải lần lượt từng bất phương trình của hệ, ta chuyển được hệ về dạng:

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{-m-2}{3} \end{cases}$$

Gọi T_1, T_2 là hai tập nghiệm của các bất phương trình trên, ta có:

$$T_1 = (1, +\infty), T_2 = (-\infty, \frac{-m-2}{3}).$$

Để hệ bất phương trình có nghiệm, điều kiện là $T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, tức là:

$$\frac{-m-2}{3} > 1 \Leftrightarrow -m-2 > 3 \Leftrightarrow m < -5.$$

Vậy, với $m < -5$ hệ bất phương trình có nghiệm.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 0 \leq 2(x^2-1) \leq (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ x^2-2x-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ |x| \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [1, 3] \cup \{-1\}$.

Câu III.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Chuyển phương trình Elip về dạng chính tắc là

$$(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 3, b = 2 \text{ và } c = \sqrt{5}.$$

Từ đó:

- Tọa độ các đỉnh $A_1(-3, 0), A_2(3, 0), B_1(0, -2), B_2(0, 2)$.
- Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$.
- Tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$\rho_{M(E)} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36} < 1 \Leftrightarrow M \text{ nằm trong Elíp}$$

do đó mọi đường thẳng đi qua M luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng đường thẳng (d) không thể song song với Oy, do đó giả sử (d) có hệ số góc k, ta được:

$$y = k(x-1) + 1 \Leftrightarrow (d): y = kx - k + 1. \quad (1)$$

Toạ độ giao điểm A, B của (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = kx - k + 1 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9(kx - k + 1)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (4 + 9k^2)x^2 - 18k(k - 1)x + 9k^2 - 18k - 27 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thoả mãn:

$$\begin{cases} x_A + x_B = \frac{18k(k - 1)}{4 + 9k^2} \\ x_A \cdot x_B = \frac{9k^2 - 18k - 27}{4 + 9k^2} \end{cases}$$

Theo giả thiết $MA = MB$

$$\Leftrightarrow x_A + x_B = 2x_M \Leftrightarrow \frac{18k(k - 1)}{4 + 9k^2} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{4}{9}$$

Thay $k = -\frac{4}{9}$ vào (1), ta được phương trình đường thẳng (d): $4x + 9y - 13 = 0$.

Chú ý: Với câu c) ta có thể sử dụng cách giải khác như sau:

Lấy $A(x_0, y_0) \in (E)$, và vì B đối xứng với A qua M nên $B(2 - x_0, 2 - y_0)$. Khi đó:

$$\begin{cases} 4x_0^2 + 9y_0^2 = 36 \\ 4x_0 + 9y_0 = 13 \end{cases} \Rightarrow \text{toạ độ của A, B.}$$

Lập phương trình đường thẳng qua A và B.

Câu IV. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x'} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y'})^2 \leq (x + y)(x^3 + y^3) = 2(x + y)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^4 \leq 4(x + y)^2 = 4(1.x + 1.y)^2 \leq 4(1 + 1)(x^2 + y^2) = 8(x^2 + y^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^3 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2, \text{ đpcm.}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x'}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y'}} \\ x' + y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ x' + y' = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.$$

ĐỀ SỐ 39

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned} A &= 8\sin\left(a - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2a = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2a\right] \cdot \cos 2a \\ &= 2\cos 2a - 4\cos^2 2a = 2\cos 2a - 2(1 + \cos 4a) \\ &= -2 + 2\cos 2a - 2\cos 4a. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Nhân hai vế với $2\sin \frac{\pi}{19}$, ta được:

$$\begin{aligned} 2A \sin \frac{\pi}{19} &= 2\sin \frac{\pi}{19} \cdot \cos \frac{\pi}{19} + 2\sin \frac{\pi}{19} \cdot \cos \frac{3\pi}{19} + \\ &\quad + 2\sin \frac{\pi}{19} \cdot \cos \frac{5\pi}{19} + \dots + 2\sin \frac{\pi}{19} \cdot \cos \frac{17\pi}{19} \\ &= \sin \frac{2\pi}{19} + \sin \frac{4\pi}{19} - \sin \frac{2\pi}{19} + \sin \frac{6\pi}{19} - \sin \frac{4\pi}{19} + \dots + \sin \frac{18\pi}{19} - \sin \frac{16\pi}{19} \\ &= \sin \frac{18\pi}{19} = \sin(\pi - \frac{\pi}{19}) = \sin \frac{\pi}{19} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Nhận xét:

1. Như vậy trong lời giải trên để tính giá trị của biểu thức chúng ta đã sử dụng nhân tử phụ $\sin \frac{\pi}{19}$ để tạo ra các tích:

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

tạo thuận lợi cho việc rút gọn VP.

Từ đó các em học sinh dễ nhận thấy rằng ý tưởng này cũng sẽ được áp dụng cho biểu thức bao gồm tổng các sin, bởi:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)].$$

2. Chúng ta đã từng biết tới việc tính giá trị của biểu thức lượng giác bằng việc giải phương trình, chỉ có điều ở đây chúng ta sẽ sử dụng tính chất nghiệm của các phương trình đại số (định lý Viét cho các nghiệm của phương trình bậc 2, 3, 4 ...) để xác định giá trị, trong những trường hợp như vậy chúng ta thường thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chọn một phương trình nhận các giá trị trong biểu thức làm nghiệm.

Thí dụ với $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$ là nghiệm của phương trình:

$$5x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bước 2: Xây dựng phương trình đại số nhận các hàm số lượng giác chứa các cung làm nghiệm, từ đó thiết lập hệ thức Viét cho chúng.

Bước 3: Tính giá trị của biểu thức.

Câu II.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Giải lần lượt từng bất phương trình của hệ, ta chuyển được hệ về dạng:

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ 2x < 4 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \\ x \leq 5 \end{cases}.$$

Gọi T_1, T_2 và T_3 là ba tập nghiệm của các bất phương trình trên, ta có:

$$T_1 = [-1, +\infty), T_2 = (-\infty, 2) \text{ và } T_3 = (-\infty, 5].$$

Từ đó, suy ra tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là:

$$T = T_1 \cap T_2 \cap T_3 = [-1, 2).$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Sử dụng phương pháp điều kiện cần và đủ.

Điều kiện cần: Biến đổi hệ về dạng:

$$\begin{cases} x(x-2) + m = 0 \\ x^2(x^2 - 4x + 4) + m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + m = 0 \\ x^2(x-2)^2 + m - 10 < 0 \end{cases} \quad (I)$$

Nhận xét rằng nếu hệ có nghiệm x_0 thì:

$$\begin{cases} x_0(x_0 - 2) + m = 0 \\ x_0^2(x_0 - 2)^2 + m - 10 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |(2 - x_0) - 2|(2 - x_0) + m = 0 \\ |(2 - x_0) - 2|^2(2 - x_0)^2 + m - 10 < 0 \end{cases}$$

Tức là $2 - x_0$ cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = 2 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1. \quad (*)$$

Khi đó, hệ (I) có dạng:

$$\begin{cases} -1 + m = 0 \\ m - 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta được:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2(x-2)^2 - 9 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, với $m = 1$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu III. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án B.

Lời giải tự luận: Xét đường tròn (C_1) , (C_2) , ta được:

$$(C_1): \begin{cases} \text{Tâm } O \\ \text{Bán kính } R_1 = 2 \end{cases}, (C_2): \begin{cases} \text{Tâm } O \\ \text{Bán kính } R_2 = 1 \end{cases}$$

Với $B(x_B, y_B) \in (C_2)$ thì:

$$x_B^2 + y_B^2 = 1. \quad (1)$$

Gọi B_1 là điểm đối xứng với B qua $Ox \Rightarrow B_1(x_B, -y_B) \in OA$ và thỏa mãn

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB_1} \Rightarrow A(2x_B, -2y_B)$$

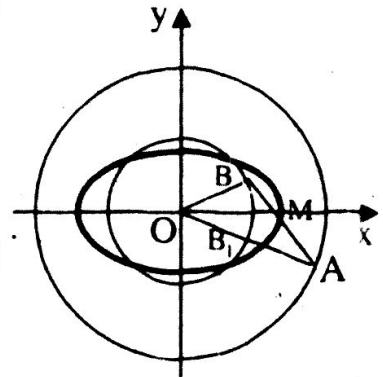
Khi đó, tọa độ trung điểm M của AB được cho bởi:

$$M: \begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2x_B + x_B}{2} \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2y_B + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{2x}{3} \\ y_B = -2y \end{cases} \quad (I)$$

Thay (I) vào (1), ta được:

$$\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{1/4} = 1.$$

Vậy, tập hợp các điểm M thuộc Elíp (E): $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{1/4} = 1.$



Nhận xét: Bài toán trên được tổng quát:

" Cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) có phương trình:

$$(C_1): x^2 + y^2 = (a+b)^2; (C_2): x^2 + y^2 = (a-b)^2.$$

Các điểm P, Q lần lượt chạy trên $(C_1), (C_2)$ sao cho Ox là tia phân giác của góc POQ . Gọi M là trung điểm PQ , chứng minh rằng M thuộc Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } 0 < b < a$$

Chúng ta thường thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh tập hợp điểm là Elíp (E) bằng việc chỉ ra hai điểm cố định A, B và M thỏa mãn $MA + MB = 2a$ – không đổi.

Bước 2: Lập phương trình chính tắc của Elíp (E) nhận A, B làm tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng $2a$.

Câu IV.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos t} = 1 \\ \tan t = \frac{y}{\sqrt{3}} \end{cases} \xrightarrow[\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}]{\frac{1}{\cos^2 t} = \tan^2 t + 1} \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (*) \end{cases}$$

Vậy $M(t)$ thuộc nhánh bên phải của Hyperbol (H) có phương trình cho bởi $(*)$ và có hai tiêu điểm $F_1(-2, 0)$ và $F_2(2, 0)$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Bằng cách đặt $u = \tan \frac{t_1}{2}$ và $v = \tan \frac{t_2}{2}$ ($u \neq v$ vì $t_1 \neq t_2$), khi đó:

- Tọa độ hai điểm $M(t_1)$ và $M(t_2)$ được viết lại dưới dạng:

$$M(t_1): \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\cos t_1} = \frac{1+u^2}{1-u^2} \\ y_1 = \sqrt{3} \tan t_1 = \frac{2u\sqrt{3}}{1-u^2} \end{cases} \text{ và } M(t_2): \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\cos t_2} = \frac{1+v^2}{1-v^2} \\ y_2 = \sqrt{3} \tan t_2 = \frac{2v\sqrt{3}}{1-v^2} \end{cases}$$

- Với điều kiện $M(t_1), M(t_2)$ và tiêu điểm F_2 thẳng hàng, ta được:

$$\frac{x_{F_2} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_{F_2} - y_1}{y_2 - y_1} \Leftrightarrow \frac{2 - \frac{1+u^2}{1-u^2}}{\frac{1+v^2}{1-v^2} - \frac{1+u^2}{1-u^2}} = \frac{\frac{2u\sqrt{3}}{1-u^2}}{\frac{2v\sqrt{3}}{1-v^2} - \frac{2u\sqrt{3}}{1-u^2}}$$

$$\Leftrightarrow uv = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan \frac{t_1}{2} \cdot \tan \frac{t_2}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Câu V. Ta có:

$$VT = (x^3 + y^3)^2 = (x \cdot x^2 + y \cdot y^2)^2 \leq (x^2 + y^2)(x^4 + y^4), \text{ đpcm.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{x}{x^3} = \frac{y}{y^3} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} \Leftrightarrow x = y.$$

ĐỀ SỐ 40

Câu I.

a. Biến đổi biểu thức về dạng:

$$\begin{aligned}
 A &= (\cos 2a + \cos a) \cdot \cos a + (\cos 2a - \cos a) \cdot \sin a - 1 \\
 &= \cos 2a \cdot \cos a + \cos^2 a + \cos 2a \cdot \sin a - \cos a \cdot \sin a - 1 \\
 &= \cos 2a \cdot \cos a + 1 - \sin^2 a + \cos 2a \cdot \sin a - \cos a \cdot \sin a - 1 \\
 &= (\cos a + \sin a) \cdot \cos 2a - (\sin a + \cos a) \cdot \sin a \\
 &= (\cos a + \sin a) \cdot (\cos 2a - \sin a) \\
 &= \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left[\cos 2a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] \\
 &= -2\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{3a}{2} - \frac{\pi}{4}\right).
 \end{aligned}$$

b. *Trả lời trắc nghiệm:* Đáp án C.

Lời giải tự luận: Viết lại A dưới dạng:

$$A = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{\cos \pi}.$$

Nhận xét rằng $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi$ là nghiệm của phương trình:

$$5x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Ta sẽ đi xây dựng phương trình đại số nhận $\cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{3\pi}{5}, \cos \pi$ làm nghiệm

bằng cách:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 3x = \pi - 2x + 2k\pi \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - 2x + 2k\pi) \\
 &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = -\cos 2x \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = -(2\cos^2 x - 1) \\
 &\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0.
 \end{aligned}$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \pi = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \pi + \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{5} = -\frac{3}{4} \\ \cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \pi = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Vậy, ta được:

$$A = \frac{\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \pi + \cos \pi \cdot \cos \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{3\pi}{5} \cdot \cos \pi} = -3.$$

Câu II. Biến đổi bất phương trình về dạng

$$(m+1)x \leq n^2 - 1. \quad (1)$$

Xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 0 \leq 0, \text{ luôn đúng.}$$

Trường hợp 2: Với $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{m^2 - 1}{m + 1} \Leftrightarrow x \leq m - 1.$$

Trường hợp 3: Với $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$, ta được:

$$(1) \Leftrightarrow x \geq \frac{m^2 - 1}{m + 1} \Leftrightarrow x \geq m - 1.$$

Kết luận:

- Với $m = -1$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = \mathbf{R}$.
- Với $m > -1$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty, m - 1]$.
- Với $m < -1$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = [m - 1, +\infty)$.

Câu III. Viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} (x - m)(x - 2 + m) < 0 & (1) \\ x^2 + m^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Xét hệ toạ độ Oxm , ta có :

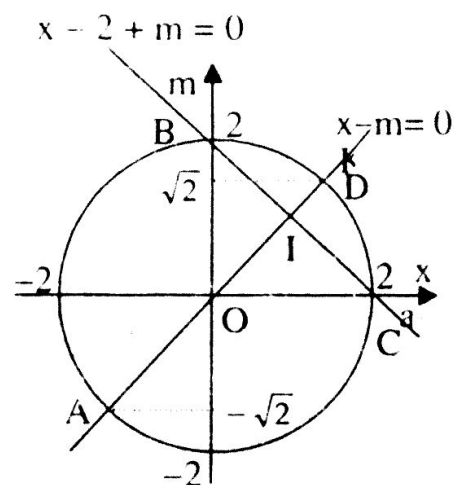
- Các điểm $M(x, m)$ thoả mãn (1) thuộc hai góc đối đỉnh AIB và CID (không kể cạnh).
- Các điểm $M(x, m)$ thoả mãn (2) thuộc đường tròn $(O, 2)$ ký hiệu (C).
- Các điểm $M(x, m)$ thoả mãn hệ thuộc hai cung tròn $\widehat{AB}$ và $\widehat{CD}$ trên (C), trong đó :

Toạ độ của A, D là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - m = 0 \\ x^2 + m^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \\ D(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

Toạ độ của B, C là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - 2 + m = 0 \\ x^2 + m^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(0, 2) \\ C(2, 0) \end{cases}$$



- Chiều hai cung $\widehat{AB}$ và $\widehat{CD}$ lên Om , được $I_m = (-\sqrt{2}, 2)$.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 2$.

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án C.

Lời giải tự luận: Hệ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow -\sqrt{2} < m \leq 0$ hoặc $\sqrt{2} \leq m < 2$.

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Hệ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{2}$.

Câu IV. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: (Δ) đi qua giao điểm (d_1) , (d_2) nên (Δ) thuộc chùm tạo bởi (d) , (d_2) , có dạng:

$$\begin{aligned} (\Delta): \alpha(2x - y + 1) + \beta(x - 2y - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\Delta): (2\alpha + \beta)x - (\alpha + 2\beta)y + \alpha - 3\beta &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Gọi $A = (\Delta) \cap (Ox)$, khi đó toạ độ điểm A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2\alpha + \beta)x - (\alpha + 2\beta)y + \alpha - 3\beta = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{3\beta - \alpha}{2\alpha + \beta}, 0\right).$$

Gọi $B = (\Delta) \cap (Oy)$, khi đó toạ độ điểm B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2\alpha + \beta)x - (\alpha + 2\beta)y + \alpha - 3\beta = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(0, \frac{\alpha - 3\beta}{\alpha + 2\beta}\right).$$

Đường thẳng (Δ) chắn trên hai trục toạ độ những đoạn bằng nhau, suy ra:

$$OA = OB \Leftrightarrow \left| \frac{3\beta - \alpha}{2\alpha + \beta} \right| = \left| \frac{\alpha - 3\beta}{\alpha + 2\beta} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha\beta - 3\beta^2 = 0 \\ \alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t - 3 = 0 \\ t^2 - 4t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$, ta được

$$(\Delta_1): (2x - y + 1) + (x - 2y - 3) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_1): 3x - 3y - 2 = 0.$$

- Với $t = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$, ta được

$$(\Delta_2): -(2x - y + 1) + (x - 2y - 3) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_2): x + y + 4 = 0.$$

- Với $t = 3 \Leftrightarrow \alpha = 3\beta$, ta được

$$(\Delta_3): 3(2x - y + 1) + (x - 2y - 3) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_3): 7x - 5y = 0.$$

Vậy, có ba đường thẳng thoả mãn điều kiện đầu bài.

Câu V.

a. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, ta có:

$$\tan \alpha = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b = c \tan \alpha$$

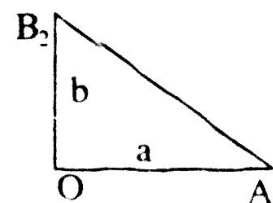
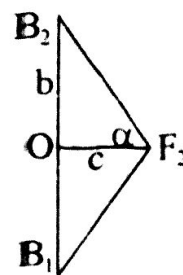
suy ra:

$$\begin{aligned} e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow c^2 &= \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{c^2 \tan^2 \alpha + c^2} = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow e &= \cos \alpha. \end{aligned}$$

b. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án D.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, ta có:

$$A_1B_2 = 2kc \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2kc \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 4k^2c^2$$



$$\Leftrightarrow c^2 + b^2 + b^2 = 4k^2 c^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{(4k^2 - 1)c^2}{2}$$

suy ra:

$$e = \frac{c}{a} \Leftrightarrow e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{c^2}{b^2 + c^2} = \frac{c^2}{\frac{(4k^2 - 1)c^2}{2} + c^2} = \frac{2}{4k^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow e = \sqrt{\frac{2}{4k^2 + 1}}$$

c. **Trả lời trắc nghiệm:** Đáp án A.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{2a}{e} = 2kc \Leftrightarrow \frac{2a}{e} = 2kac \Leftrightarrow e^2 = \frac{1}{k} \Leftrightarrow e = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Câu VI. Trả lời trắc nghiệm: Đáp án D.

Lời giải tự luận: Kí hiệu các phương trình của hệ theo thứ tự là (1) và (2).

Xét (1):

$$x - 1 = \sqrt{x^2 - y^2 - 2(x - y)} = \sqrt{(x - y)(x + y - 2)} \stackrel{\text{CosI}}{\leq} \frac{x - y + x + y - 2}{2} = x -$$

Vậy (1) tương đương với:

$$x - y = x + y - 2 \Leftrightarrow y = 1.$$

Với $y = 1$ thì (2) có dạng:

$$\sqrt{x - 1} + \sqrt{x} = 1. \quad (3)$$

Vì điều kiện $x \geq 1$ nên $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x} \geq 1$, do đó (3) tương đương với $x = 1$.

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $x = y = 1$.

PHỤ LỤC
PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN
PHẦN: ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I
MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1 MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

Bài toán 1: Xây dựng mệnh đề.

Phương pháp thực hiện

Dựa vào định nghĩa các mệnh đề $\bar{P}$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$.

Bài toán 2: Xét chân trị của mệnh đề.

Phương pháp thực hiện

Dựa vào chân trị của các mệnh đề $\bar{P}$, $P \Rightarrow Q$, $P \Leftrightarrow Q$, cụ thể:

- Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.
- $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai.
- $P \Leftrightarrow Q$ đúng nếu của hai mệnh đề P và Q cùng chân trị.

Ngoài ra, chúng ta cần biến thêm hai mệnh đề $P \vee Q$, $P \wedge Q$, cụ thể:

- $P \vee Q$ chỉ sai khi P, Q cùng sai.
- $P \wedge Q$ chỉ đúng khi P, Q cùng đúng.

Bài toán 3: Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học.

Phương pháp áp dụng

Phát biểu các định lý dưới dạng:

$$"\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)" \text{ hoặc } "\forall x \in X, P(x) \Leftrightarrow Q(x)"$$

Để chứng minh một định lý thông thường chúng ta lựa chọn một trong ba cách sau:

Cách 1: Chứng minh trực tiếp.

Cách 2: Chứng minh gián tiếp (được gọi là chứng minh bằng phản chứng), trong trường hợp này ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Giả sử tồn tại $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng còn $Q(x)$ sai.

Bước 2: Dùng lập luận và các kiến thức toán học đã biết để đi đến một mâu thuẫn.

§2 TẬP HỢP

Bài toán 1: Xác định tập hợp.

Phương pháp thực hiện

1. Với tập hợp A ta có hai cách:

Cách 1: Liệt kê các phần tử của A .

Cách 2: Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của A .

2. Sử dụng định nghĩa về các phép toán của tập hợp:

- Ta có $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.

Nếu dùng trục số để biểu diễn ta thực hiện các bước:

Bước 1: Biểu diễn A trên trục số.

Bước 2: Biểu diễn B trên trục số.

Bước 3: Gạch bỏ phần $R \setminus (A \cup B)$, phần còn lại trên trục số chính là $A \cup B$.

- Ta có $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Nếu dùng trục số để biểu diễn ta thực hiện các bước:

Bước 1: Biểu diễn A trên trục số và gạch bỏ phần $R \setminus A$.

Bước 2: Biểu diễn B trên trục số và gạch bỏ phần $R \setminus B$.

Bước 3: Phần còn lại trên trục số chính là $A \cap B$.

- Ta có $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

- Ta có $P(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

3. Tìm các tập con của tập A , ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định số phần tử của A , giả sử bằng k .

Bước 2: Liệt kê các tập hợp gồm tập $\emptyset$, A và các tập con có 1, 2, ..., $k-1$ phần tử của A .

Bài toán 2: Chứng minh $A \subset B$.

Chứng minh $A = B$.

Phương pháp thực hiện

1. **Để chứng minh $A \subset B$** , ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện các bước:

Bước 1: Lấy phần tử bất kỳ $x \in A$, rồi chứng minh rằng $x \in B$.

Bước 2: Vậy, ta được $A \subset B$.

Cách 2: Sử dụng tính chất bắc cầu:

$$\begin{cases} A \subset C \\ C \subset B \end{cases} \Rightarrow A \subset B.$$

Cách 3: Bằng cách liệt kê A , B , từ đó suy ra $A \subset B$.

2. **Để chứng minh $A = B$** , ta lựa chọn một trong các cách sau:

Cách 1: Thực hiện các bước:

Bước 1: Chứng minh $A \subset B$.

Bước 2: Chứng minh $B \subset A$.

Bước 3: Vậy, ta được $A = B$.

Lưu ý: Nếu các phép biến đổi là tương đương, tức là:

$$x \in A \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in B$$

Ta khẳng định ngay $A = B$.

Cách 2: Sử dụng tính chất bắc cầu:

$$\begin{cases} A = C \\ B = C \end{cases} \Rightarrow A = B.$$

Cách 3: Bằng cách liệt kê A, B , từ đó suy ra $A = B$.

CHƯƠNG II

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1 HÀM SỐ

Bài toán 1: Tìm tập xác định của hàm số.

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1: Tìm tập D của x để $f(x)$ có nghĩa, tức là tìm:

$$D = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) \in \mathbf{R}\}.$$

Phương pháp 2: Tìm tập E của x để $f(x)$ không có nghĩa, khi đó tập xác định của hàm số là $D = \mathbf{R} \setminus E$.

Chú ý. Thông thường $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì với:

- $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ điều kiện là $\begin{cases} f_1(x), f_2(x) \text{ có nghĩa} \\ f_2(x) \neq 0 \end{cases}$.
- $f(x) = \sqrt[k]{f_1(x)}$ ($k \in \mathbf{Z}$) điều kiện là $\begin{cases} f_1(x) \text{ có nghĩa} \\ f_1(x) \geq 0 \end{cases}$.

Bài toán 2: Xét sự biến thiên của hàm số.

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai phương pháp sau:

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa.

Phương pháp 2: Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy $x_1, x_2 \in (a, b)$ với $x_1 \neq x_2$ ta thiết lập tỉ số:

$$A = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Bước 2: Khi đó:

- Nếu $A > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số đồng biến trên (a, b) .
- Nếu $A < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$ và $x_1 \neq x_2$ thì hàm số nghịch biến trên (a, b) .

Bài toán 3: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số.

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

- Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.
- Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$, khi đó:

- Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
- Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

§2 HÀM SỐ BẬC NHẤT

1. SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

Định nghĩa: Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$, trong đó a, b là các hằng số và $a \neq 0$.

Cho hàm số:

$$y = ax + b, \text{ với } a \neq 0.$$

Miền xác định $D = \mathbf{R}$.

Sự biến thiên: là hàm số đơn điệu.

Cụ thể:

- Với $a > 0$, hàm số đồng biến.
- Với $a < 0$, hàm số nghịch biến.

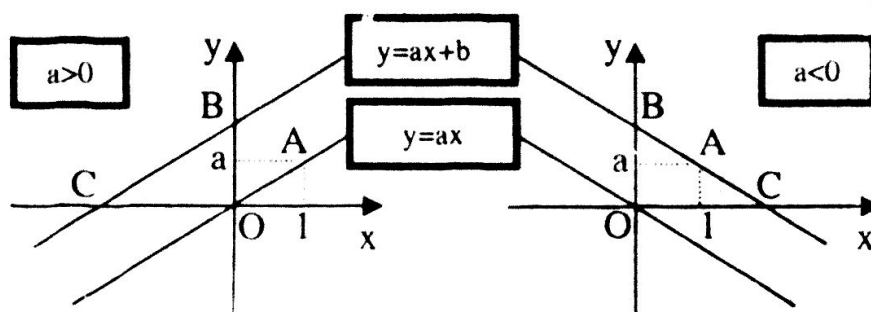
Bảng biến thiên:

Với $a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$

Với $a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

Đồ thị: đồ thị của hàm bậc nhất là một đường thẳng (d) , do đó chỉ cần xác định hai điểm bất kỳ thuộc (d) , ta sẽ có được đồ thị của (d) .

- Nếu $b = 0$, đồ thị của (d) đi qua gốc tọa độ O và điểm $A(1, a)$.
- Nếu $b \neq 0$, đồ thị của (d) đi qua hai điểm $B(0, b)$ và $C(-\frac{b}{a}, 0)$.



Hệ số góc: hệ số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng (d) .

Chú ý: Cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) :

$$(d_1): y = a_1x + b_1 \text{ với } a_1 \neq 0,$$

$$(d_2): y = a_2x + b_2 \text{ với } a_2 \neq 0.$$

- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ và } b_1 \neq b_2.$
- $(d_1) \text{ cắt } (d_2) \Leftrightarrow a_1 \neq a_2.$

2. ĐỒ THỊ VÀ SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $y = |ax+b|$ ($a \neq 0$)

Cho hàm số:

$$y = |ax + b|, \text{ với } a \neq 0.$$

Ta biến đổi hàm số về dạng:

$$y = \begin{cases} ax + b & \text{khi } ax + b \geq 0 \\ -ax - b & \text{khi } ax + b < 0 \end{cases} = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -ax - b & \text{khi } x < -\frac{b}{a} \end{cases}.$$

Do đó, đồ thị hàm số $y = |ax + b|$ gồm hai phần:

- Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = ax + b$.
- Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của $y = ax + b$ qua trục hoành.

§3 PHÉP TỊNH TIẾN ĐỒ THỊ

Định lý 1: Trong mặt phẳng tọa độ, cho (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, p và q là hai số tùy ý. Khi đó:

1. Đồ thị hàm số $y = f(x) + q$ có được khi tịnh tiến (G)

- Lên trên q đơn vị nếu $q > 0$.
- Xuống dưới $|q|$ đơn vị nếu $q < 0$.

2. Đồ thị hàm số $y = f(x - p)$ có được khi tịnh tiến (G)

- Sang phải p đơn vị nếu $p > 0$.
- Sang trái $|p|$ đơn vị nếu $p < 0$.

Định lý 2: Trong mặt phẳng tọa độ, cho (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, p và q là hai số tùy ý. Khi đó đồ thị $y = f(x + p) + q$ có được bằng việc thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến.

Ta có thể lựa chọn một trong hai lược đồ sau :

- Từ $y = f(x)$ suy ra $y = f(x + p) = g(x)$ và lại từ $y = g(x)$ suy ra $y = g(x) + q = f(x + p) + q$.
- Từ $y = f(x)$ suy ra $y = f(x) + q = h(x)$ và lại từ $y = h(x)$ suy ra $y = h(x + p) = f(x + p) + q$.

Khi đó vectơ $\vec{v}(a, b)$ được gọi là vectơ tịnh tiến.

Chúng ta có thể tìm được vectơ bằng phương pháp hằng số bất định.

§4 HÀM SỐ BẬC HAI

Bài toán 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc hai.

Phương pháp thực hiện

Miền xác định $D = \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên:

Với $a > 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$+\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

Vậy, ta có kết luận:

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Khi $x = -\frac{b}{2a}$ hàm số đạt cực tiểu

$$y_{\min} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Với $a < 0$		
x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\infty$
	$-\frac{\Delta}{4a}$	

Vậy, ta có kết luận:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{b}{2a})$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$.
- Khi $x = -\frac{b}{2a}$ hàm số đạt cực đại

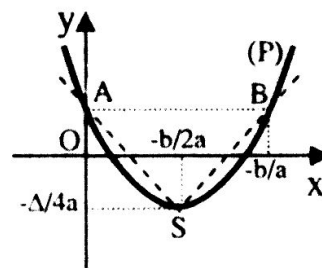
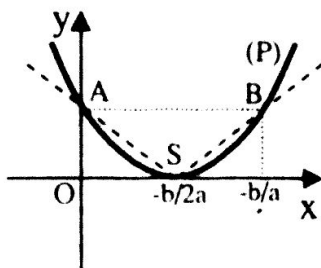
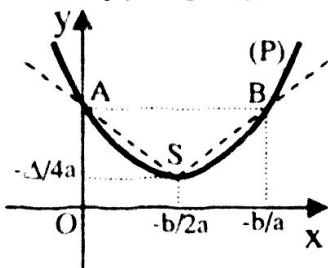
$$y_{\max} = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Để vẽ đồ thị hàm số bậc hai, chúng ta không thực hiện các phép tính tiến từ đồ thị hàm số $y = ax^2$ mà thực hiện như sau:

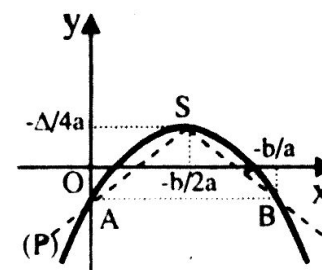
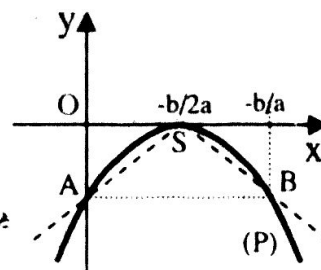
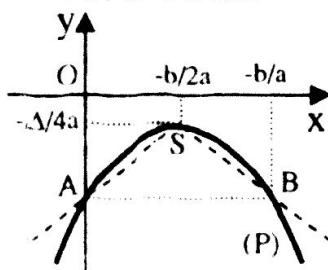
- Lấy ba điểm chủ đạo, gồm đỉnh S và hai điểm A, B đối xứng với nhau qua S .
- Nối ASB để được một góc rồi thực hiện vẽ đường cong parabol lượn theo đường góc này.

Ta có các trường hợp:

- Với $a > 0$ thì:



- Với $a < 0$ thì:



Nhận xét chung:

- $\Delta > 0$ Parabol cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.
- $\Delta = 0$ Parabol tiếp xúc với trục hoành.
- $\Delta < 0$ Parabol không cắt trục hoành.

Bài toán 2: Hàm số dạng $y = |ax^2 + bx + c|$, với $a \neq 0$.

Phương pháp thực hiện

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số (P): $y = ax^2 + bx + c$, với $a \neq 0$.

Bước 2: Đồ thị hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ gồm hai phần:

- Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị (P).
- Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (P) qua trục hoành.

Bước 3: Dựa vào đồ thị chúng ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$.

Bài toán 3: Lập phương trình Parabol.

Phương pháp thực hiện

Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử Parabol (P), có phương trình:

$$(P): y = ax^2 + bx + c, \text{ với } a \neq 0.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K để xác định a, b, c.

Trong bước này ta cần lưu ý các điều kiện thường gặp sau:

- Điểm $A(x_0, y_0) \in (P)$, ta nhận được điều kiện:

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c.$$

- (P) có đỉnh $S(x_0, y_0)$ ta nhận được điều kiện:

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$$

- (P) có giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) bằng y_0 , ta nhận được điều kiện:

$$\begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases} \quad (\text{hoặc}) \quad \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}.$$

- (P) đạt giá trị cực đại (hoặc cực tiểu) tại điểm có hoành độ bằng x_0 , ta nhận được điều kiện:

$$\begin{cases} a < 0 \\ x_0 = -\frac{b}{2a} \end{cases} \quad (\text{hoặc}) \quad \begin{cases} a > 0 \\ x_0 = -\frac{b}{2a} \end{cases}.$$

- (P) nhận đường thẳng $x = x_0$ làm trục đối xứng ta nhận được điều kiện:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Bước 3: Kết luận.

CHƯƠNG III

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1 PHƯƠNG TRÌNH

Định nghĩa: Hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ và $f_2(x) = g_2(x)$ có cùng một tập nghiệm là hai phương trình tương đương. Khi đó, ta viết:

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x).$$

Định nghĩa: Cho phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ có tập nghiệm T_1 . Phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ có tập nghiệm T_2 được gọi là **hệ quả** của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ nếu $T_1 \subset T_2$.

§2 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài toán 1: Phương trình bậc nhất một ẩn.

Phương pháp thực hiện

1. Với bài toán "Giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn" chúng ta sử dụng kiến thức đã biết trong phần lý thuyết.
2. Với bài toán "Tìm điều kiện để phương trình bậc nhất một ẩn có nghiệm thoả mãn điều kiện K" chúng ta thực hiện như sau:

Giả sử điều kiện cho ẩn số (nếu cần) là K, khi đó ta có ĐKXĐ là tập D.

Biến đổi phương trình về dạng:

$$ax = -b. \quad (*)$$

Khi đó:

- (1). Phương trình (1) có nghiệm duy nhất:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\frac{b}{a} \in D \end{cases}.$$

- (2). Phương trình (1) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ a \neq 0 \\ x = -\frac{b}{a} \in D \end{cases}.$$

(3). Phương trình (1) có nghiệm $\forall x \in D$ thường ta có điều kiện $a = b = 0$.

(4). Phương trình ban đầu vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ \& } b \neq 0 \\ a \neq 0 \\ x = -\frac{b}{a} \notin D \end{cases}$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp các em học lên trình bày đòi hỏi của bài toán thông qua các bước giải biện luận.

Bài toán 2: Giải và biện luận phương trình chứa ẩn ở mẫu thức.

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho phương trình, khi đó ta có ĐKXĐ là tập D.

Bước 2: Biến đổi phương trình về dạng:

$$ax = -b. \quad (*)$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow 0 = -b \Leftrightarrow b = 0.$$

Vậy, ta được:

- Nếu $b = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in D$.
- Nếu $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$ thì:

$$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}.$$

Khi đó, cần kiểm tra điều kiện để $x \in D$.

Bước 3: Kết luận.

Bài toán 3: Phương trình tích.

Phương pháp thực hiện

Giả sử cần đi "Giải và biện luận phương trình $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$ ", ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Biến đổi phương trình ban đầu về dạng:

$$\begin{cases} a_1x + b_1 = 0 & (1) \\ a_2x + b_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Bước 2: Giải và biện luận (1).

Bước 3: Giải và biện luận (2).

Bước 4: Kết luận: Trong bước này các em học sinh cần biết cách kết hợp các trường hợp đã xét trong cả hai bước 1 và bước 2 để có được lời kết luận đầy đủ và tường minh.

Bài toán 4: Phương dạng $|ax + b| = |cx + d|$.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng tính chất:

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

Phương trình được chuyển thành dạng:

$$\begin{cases} ax + b = cx + d & (1) \\ ax + b = -cx - d & (2) \end{cases}$$

Như vậy, tập nghiệm của phương trình là hợp 2 tập nghiệm của (1), (2).

§3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

Bài toán 1: Giải phương trình bậc nhất hai ẩn.

Mỗi phương trình bậc nhất hai ẩn đều có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng, gọi là đường thẳng $ax + by = c$ (mỗi điểm của đường thẳng $ax + by = c$ biểu diễn một cặp nghiệm (x, y) của phương trình).

- Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số bậc nhất:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

- Nếu $a = 0, b \neq 0$ thì đường thẳng đó là đồ thị hàm số:

$$y = \frac{c}{b}$$

đó là đường thẳng song song với Ox nếu $c \neq 0$, trùng với Ox nếu $c = 0$.

- Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì đường thẳng đó có dạng:

$$x = \frac{c}{a}$$

đó là đường thẳng song song với Oy nếu $c \neq 0$, trùng với Oy nếu $c = 0$.

Lưu ý:

1. Đường thẳng $x = \frac{c}{a}$ không phải là đồ thị hàm số.
2. Với yêu cầu giải phương trình $ax + by = c$, ta thường thực hiện ba công việc:
 - Biến đổi để chỉ ra một vài nghiệm cụ thể của phương trình.
 - Viết được công thức nghiệm tổng quát của phương trình.
 - Biểu diễn nghiệm của phương trình trên mặt phẳng tọa độ.

Bài toán 2: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tính các định thức:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Bước 2: Biện luận:

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)$.
- Nếu $D = 0$ và hoặc $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x_0, y_0) thỏa mãn phương trình $a_1 x + b_1 y = c_1$.

Bước 3: Kết luận.

Chú ý:

1. Để nhớ cách tính các định thức ta có minh họa sau:

$$\begin{array}{cccc} & & \overline{D_x} & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 \\ \hline & D & & \overline{D_y} \end{array}$$

2. Với bài toán yêu cầu tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x, y không phụ thuộc vào tham số, khi đó từ hệ nghiệm x, y hoặc từ hệ ban đầu ta khử tham số sẽ được hệ thức cần tìm.

§4 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bài toán 1: Phương trình bậc hai một ẩn.

Phương pháp thực hiện

Với yêu cầu "Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1)" ta sẽ thực hiện như sau:

Trường hợp 1. Với $a = 0$ thì phương trình có dạng:

$$bx + c = 0 \Leftrightarrow bx = -c. \quad (2)$$

a. Nếu $b = 0$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow 0 = -c \Leftrightarrow c = 0.$$

- Nếu $c = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $c \neq 0$, phương trình vô nghiệm.

b. Nếu $b \neq 0$ thì:

$$(2) \Leftrightarrow x = -\frac{c}{b} : \text{phương trình có nghiệm duy nhất.}$$

Trường hợp 2. Với $a \neq 0$ ta tính biệt thức:

$$\Delta = b^2 - 4ac \text{ (hoặc nếu } b = 2b' \text{ thì tính } \Delta' = (b')^2 - ac).$$

- Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$) thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$) thì phương trình (1) có nghiệm kép:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ (hoặc } x_0 = -\frac{b'}{a} \text{)}.$$

- Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$) thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \text{)}.$$

Kết luận:

- Với $a = b = c = 0$, phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$.
- Với $a = b = 0$ và $c \neq 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{c}{b}$.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.
- Với $a \neq 0$ và $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (hoặc $x_0 = -\frac{b'}{a}$).
- Với $a \neq 0$ và $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ (hoặc } x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} \text{)}.$$

Bài toán 2: Điều kiện nghiệm của phương trình bậc hai một ẩn.

Phương pháp thực hiện

Với phương trình:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

để tìm điều kiện của tham số sao cho:

Dạng 1: Phương trình vô nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \text{ \& } c \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ \& } \Delta < 0 \end{cases}.$$

Dạng 2: Phương trình nhận mọi x làm nghiệm $\Leftrightarrow a = b = c = 0$.

Dạng 3: Phương trình có nghiệm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 0 \\ a = 0 \text{ \& } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ \& } \Delta \geq 0 \end{cases}.$$

Dạng 4: Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ \& } b \neq 0 \\ a \neq 0 \text{ \& } \Delta = 0 \end{cases}.$

Dạng 5: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}.$

§5 ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT

Bài toán 1: Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai.

Phương pháp thực hiện

Trước tiên, chúng ta cần hiểu rằng "*Chỉ thực hiện nhẩm nghiệm của một phương trình bậc hai trong trường hợp nó có nghiệm nguyên hoặc một nghiệm nguyên còn một nghiệm hữu tỉ*".

Để làm rõ được ý tưởng chủ đạo của phương pháp này, chúng ta bắt đầu lại bằng thí dụ với phương trình:

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 \cdot x_2 = -12 = -3 \cdot 4 \end{cases}$$

ở đó:

$$-12 = -1 \cdot 12 = 1 \cdot (-12) = -2 \cdot 6 = 2 \cdot (-6) = -3 \cdot 4 = 3 \cdot (-4)$$

trong các cặp số trên, ta chọn được cặp $(-3, 4)$ vì $-3 + 4 = 1 = x_1 + x_2$.

Từ đánh giá đó, suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1 = -3$ và $x_2 = 4$.

Như vậy, để thực hiện việc nhẩm nghiệm (nếu có thể) cho phương trình:

$$x^2 + bx + c = 0$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thiết lập hệ thức Viét cho các nghiệm x_1 và x_2 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}$$

Bước 2: Thực hiện phép phân tích c thành tích của hai thừa số, $c = m \cdot n$.

Với mỗi cặp thừa số phân tích được, ta tính ngay $m + n$, khi đó:

- Nếu $m + n = -b$, chuyển sang bước 3.
- Nếu $m + n \neq -b$, thực hiện lại bước 2.

Bước 3: Vậy, phương trình có hai nghiệm là $x_1 = m$ và $x_2 = n$.

Nhận xét:

1. Thuật toán trên có tính dùng và được hiểu như sau:

- Nếu tìm được một cặp (m, n) thoả mãn điều kiện $m + n = -b$ thì dùng lại phép thử và đưa ra lời kết luận.
- Nếu các cặp (m, n) đều không thoả mãn thì dùng và trong trường hợp này được hiểu là không nhẩm được nghiệm.

2. Chúng ta đã biết hai trường hợp đặc biệt của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là:

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = -1$ và $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Bài toán 2: Tính giá trị các biểu thức đối xứng của hai nghiệm.*Phương pháp thực hiện*Biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình

$$ax^2 + bx + c = 0$$

là biểu thức có giá trị không thay đổi khi ta hoán vị x_1 và x_2 .Ta có thể biểu thị được các biểu thức đối xứng giữa các nghiệm x_1 và x_2 theo S và P , ví dụ:

a. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P.$

b. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP.$

c. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}.$

d. $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2}.$

Bài toán 3: Xét dấu các nghiệm.*Phương pháp thực hiện*Dùng hệ thức Viét ta có thể xét dấu được các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, với $a \neq 0$ dựa trên kết quả:1. Phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$

$$\Leftrightarrow P = \frac{c}{a} < 0.$$

2. Phương trình có hai nghiệm cùng dấu:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}.$$

3. Phương trình có hai nghiệm dương $0 < x_1 \leq x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}.$$

4. Phương trình có hai nghiệm âm $x_1 \leq x_2 < 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}.$$

Bài toán 4: Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình thoả mãn một hệ thức đối xứng.*Phương pháp thực hiện*Với yêu cầu "Tìm điều kiện để các nghiệm của phương trình tm điều kiện K ", ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm điều kiện của tham số để phương trình có nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}$$

Bước 2: Áp dụng hệ thức Viét, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1 \cdot x_2 = g(m) \end{cases} \quad (I)$$

Bước 3: Biểu diễn điều kiện K thông qua (I).

Bước 4: Kết luận.

Chú ý: Trong một vài trường hợp, bài toán còn được phát biểu dưới dạng:

" Chứng minh rằng các nghiệm của phương trình thỏa mãn hệ thức cho trước ".

§§ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

Bài toán 1: Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn.

Phương pháp thực hiện

Bước 1: Từ phương trình bậc nhất rút x hoặc y rồi thế vào phương trình bậc hai. Khi đó ta được phương trình bậc hai theo x hoặc y , giả sử:

$$f(x, m) = 0. \quad (*)$$

Bước 2: Bài toán được chuyển về giải và biện luận phương trình bậc hai một ẩn.

Bước 3: Kết luận về nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán 2: Hệ phương trình đối xứng loại I.

Phương pháp thực hiện

Phương pháp chung để giải và biện luận hệ đối xứng loại I bao gồm các bước:

Bước 1: Sử dụng ẩn phụ:

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}, \text{ điều kiện } S^2 - 4P \geq 0.$$

Bước 2: Xác định S và P . Khi đó x, y là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - St + P = 0. \quad (*)$$

Bước 3: Bài toán được chuyển về giải và biện luận phương trình (*).

Chú ý:

1. Ngoài phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại I được trình bày ở trên, trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng phương pháp **Phương pháp điều kiện cần và đủ** cho yêu cầu "Tìm giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất". Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: **Điều kiện cần:** Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \quad (**)$$

- Thay (**) vào hệ, ta được giá trị của tham số. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ: thử lại.

2. Một số hệ phương trình cân sử dụng một vài phép biến đổi đơn giản để đưa về dạng đối xứng loại I. Thông thường ta sử dụng phép đổi biến.

Bài toán 3: Hệ phương trình đối xứng loại II.

Phương pháp thực hiện

Phương pháp chung để giải và biện luận hệ đối xứng loại II bao gồm các bước.

Bước 1: Trừ từng vế của hai phương trình bao giờ cũng thu được phương trình tích.

$$(x - y)f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$$

Bước 2: Giải hệ cho từng trường hợp.

Chú ý: Ngoài phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại II được trình bày ở trên, trong nhiều trường hợp ta còn sử dụng các phương pháp **Phương pháp điều kiện cần và đủ** cho yêu cầu "Tìm giá trị của tham số để hệ có nghiệm duy nhất". Khi đó, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Điều kiện cần: Nhận xét rằng, nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm của hệ, do đó hệ có nghiệm duy nhất khi:

$$x_0 = y_0. \quad (**)$$

- Thay (**) vào hệ, ta được giá trị của tham số. Đó chính là điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất.

Bước 2: Điều kiện đủ: Thử lại.

CHƯƠNG IV. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1 BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Phương pháp chứng minh bất đẳng thức

Ta lựa chọn một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Phương pháp chứng minh bằng định nghĩa. Khi đó ta lựa chọn theo các hướng:

Hướng 1: Chứng minh $A - B > 0$.

Hướng 2: Thực hiện các phép biến đổi đại số để biến đổi bất đẳng thức ban đầu về một bất đẳng thức đúng.

Hướng 3: Xuất phát từ bất đẳng thức đúng

Hướng 4: Biến đổi về trái hoặc về phải.

Phương pháp 2: Sử dụng tính chất bắc cầu, tức là chứng minh:

$$A > C \text{ và } C > B.$$

Phương pháp 3: *Phương pháp chứng minh phản chứng*, được áp dụng với các bài toán yêu cầu chứng minh ít nhất một bất đẳng thức trong các bất đẳng thức đã cho là đúng hoặc sai.

Phương pháp 4: *Phương pháp chứng minh qui nạp*.

Phương pháp 5: *Phương pháp hình học*, bằng việc sử dụng tính chất:

"Nếu a, b, c là độ ba cạnh của một tam giác thì

$$a + b > c \text{ và } |a - b| < c."$$

§2 CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

I. BẤT ĐẲNG THỨC VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Từ định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta suy ra các tính chất sau:

1. $-|a| \leq a \leq |a|$ với mọi số thực a .
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ với $a \geq 0$ (tương tự $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ với $a > 0$).
3. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ hoặc $x \geq a$ với $a \geq 0$ (tương tự $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ hoặc $x > a$ với $a > 0$).

Định lý: Với hai số thực a, b tùy ý, ta có:

$$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bài toán 1: Chứng minh bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng định nghĩa về giá trị tuyệt đối và kết quả của định lý trên.

Bài toán 2: Sử dụng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối để giải phương trình.

Phương pháp thực hiện

Với phương trình ta sử dụng các tính chất:

Tính chất 1: Nếu $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

Tính chất 2: Nếu $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.

Tính chất 3: Nếu $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Tính chất 4: Nếu $|a - b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) \geq 0$.

Bài toán 3: Sử dụng bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối để giải bất phương trình.

Phương pháp thực hiện

Với bất phương trình ta sử dụng các tính chất:

Tính chất 1: Ta có $|a + b| \leq |a| + |b|$ với mọi a, b .

Tính chất 2: Ta có $|a - b| \geq |a| - |b|$ với mọi a, b .

Tính chất 3: Nếu $|a + b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0$.

Tính chất 4: Nếu $|a - b| > |a| - |b| \Leftrightarrow b(a - b) < 0$.

II. BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN (BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI)

Định lý: Với hai số không âm a, b , ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{thường được viết } a+b \geq 2\sqrt{ab}),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Hệ quả 1: Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

Tức là, với hai số dương a, b có $a + b = S$ không đổi suy ra:

$$2\sqrt{ab} \leq S \Leftrightarrow ab \leq \frac{S^2}{4} \Rightarrow (ab)_{\max} = \frac{S^2}{4}, \text{ đạt được khi } a = b.$$

Ý nghĩa hình học: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng chu vi hình vuông có diện tích lớn nhất.

Hệ quả 2: Nếu hai số dương thay đổi nhưng có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Tức là, với hai số dương a, b có $ab = P$ không đổi suy ra:

$$a + b \geq 2\sqrt{P} \Rightarrow (a + b)_{\min} = 2\sqrt{P}, \text{ đạt được khi } a = b.$$

Ý nghĩa hình học: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Mở rộng

1. Với các số a, b, c không âm, ta luôn có:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

thường được viết:

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \text{ hoặc } (a + b + c)^3 \geq 27abc.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

2. Với n số $a_i, i = \overline{1, n}$ không âm, ta luôn có:

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_n}_{n \text{ số hạng}} \geq n \sqrt[n]{\underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}_{n \text{ số hạng}}}.$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bài toán 1: Sử dụng bất đẳng thức Côsi chứng minh bất đẳng thức.

Phương pháp thực hiện

Định hướng sử dụng bất đẳng thức Côsi cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 2: Sử dụng bất đẳng thức Côsi tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Phương pháp thực hiện

1. Việc sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm gtlđ M của hàm số hoặc biểu thức kí hiệu chung là $f(x, y, \dots)$ được hiểu theo nghĩa cần thực hiện hai công việc:
 - a. Chứng minh rằng $f(x, y, \dots) \leq M$ với mọi $x, y, \dots$ cho trước.
 - b. Tìm các giá trị của $x, y, \dots$ để $f(x, y, \dots) = M$.
 Từ đó đưa ra lời kết luận rằng "Gtlđ của hàm số hoặc biểu thức bằng M và đạt được với $x, y, \dots$ tìm được trong b)".
2. Việc sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm gtnđ m của hàm số hoặc biểu thức kí hiệu chung là $f(x, y, \dots)$ được hiểu theo nghĩa cần thực hiện hai công việc:
 - a. Chứng minh rằng $f(x, y, \dots) \geq m$ với mọi $x, y, \dots$ cho trước.
 - b. Tìm các giá trị của $x, y, \dots$ để $f(x, y, \dots) = m$.
 Từ đó đưa ra lời kết luận rằng "Gtnđ của hàm số hoặc biểu thức bằng m và đạt được với $x, y, \dots$ tìm được trong b)".

Bài toán 3: Sử dụng bất đẳng thức Côsi giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số.

Phương pháp thực hiện

Bằng việc sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) hàm số chúng ta sẽ đánh giá được một vế (hoặc đôi khi là cả hai vế) của phương trình, bất phương trình từ đó đưa ra nhận xét về sự tồn tại của nó. Để tiện minh họa chúng ta hãy quay lại ví dụ 4 trong bài toán 2, ta có:

$$(2x^3 + \frac{3}{x^2})_{\min} = 5, \text{ với } x > 0.$$

1. Như vậy, nếu bài toán được phát biểu dưới dạng "Tìm nghiệm dương của phương trình $2x^3 + \frac{3}{x^2} = 5$ ", chúng ta sẽ thực hiện như sau:

Ta có:

$$VT = x^3 + x^3 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geq 5 \sqrt[5]{x^3 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = 5.$$

Từ đó, phương trình tương đương với dấu "=" xảy ra, tức là:

$$x^3 = x^3 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = 1$.

2. Tương tự, cho bài toán "Tìm nghiệm dương của bất phương trình $2x^3 + \frac{3}{x^2} \leq 5$ "

III. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPXSKI

Định lí: Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là những số thực, ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2),$$

dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

Bài toán 1: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki chứng minh bất đẳng thức.

Phương pháp thực hiện

Định hướng sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki cho bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Phương pháp thực hiện

Ý tưởng tương tự như việc sử dụng bất đẳng thức Côsi để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

Bài toán 4: Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số.

Phương pháp thực hiện

Ý tưởng tương tự như việc sử dụng bất đẳng thức Côsi để giải phương trình, bất phương trình và hệ đại số.

§3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Định nghĩa: Hai bất phương trình có cùng một tập nghiệm là hai bất phương trình tương đương.

Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết:

$$f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x).$$

Định lý: Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ với ĐKXD D , $h(x)$ là một biểu thức xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện D ($h(x)$ có thể là hằng số). Khi đó, với điều kiện D , bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình sau:

- $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$.
- $f(x).h(x) < g(x).h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với $\forall x \in D$.
- $f(x).h(x) > g(x).h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với $\forall x \in D$.

§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài toán: Giải và biện luận bất phương trình:

$$ax + b < 0.$$

Phương pháp thực hiện

Viết lại bất phương trình dưới dạng

$$ax < -b. \quad (1)$$

Ta xét ba trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow 0 < -b \Leftrightarrow b < 0.$$

Vậy, ta được:

- Nếu $b < 0$, bất phương trình nghiệm đúng với mọi x .
- Nếu $b \geq 0$, bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: Nếu $a > 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}.$$

Trường hợp 3: Nếu $a < 0$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}.$$

Kết luận:

- Với $a > 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty, -\frac{b}{a})$.
- Với $a < 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\frac{b}{a}, +\infty)$.
- Với $a = 0$ và $b < 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = \mathbf{R}$.
- Với $a = 0$ và $b \geq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $T = \emptyset$.

Để giải một hệ bất phương trình một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

§5 DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Bài toán 1: Xét dấu các biểu thức.

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Thực hiện phân tích các đa thức trong biểu thức thành nhân tử (là tích hoặc thương các nhị thức bậc nhất).

Bước 2: Lập bảng xét dấu dạng:

x	$-\infty$	x_k	$\dots$	x_l	$+\infty$
Nhị thức 1					
$\dots$					
Nhị thức n					
Biểu thức					

Bài toán 2: Giải bất phương trình tích.

Phương pháp thực hiện

Để giải các bất phương trình dạng:

$$P(x) > 0, P(x) < 0, P(x) \geq 0, P(x) \leq 0,$$

trong đó $P(x) = (a_1x + b_1) \cdot (a_nx + b_n)$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các nghiệm $x_1, \dots, x_n$ của các nhị thức $a_1x + b_1, \dots, a_nx + b_n$.

Bước 2: Sắp xếp các nghiệm tìm được theo thứ tự tăng dần (giả sử $x_k < \dots < x_l$), từ đó lập bảng xét dấu dạng:

x	$-\infty$	x_k	$\dots$	x_l	$+\infty$
$a_1x + b_1$					
$\dots$					
$a_nx + b_n$					
$P(x)$					

Bước 3: Dựa vào kết quả bảng xét dấu suy ra nghiệm cho bất phương trình.

Bài toán 3: Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Phương pháp thực hiện

Với các bất phương trình có thể đưa về dạng:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0, \frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0,$$

trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là tích những nhị thức bậc nhất được thực hiện theo các bước:

Bước 1: Tìm các nghiệm $x_1, \dots, x_n$ của các phương trình $P(x) = 0$ và $Q(x) = 0$.

Bước 2: Sắp xếp các nghiệm tìm được theo thứ tự tăng dần (giả sử $x_k < \dots < x_l$), từ đó lập bảng xét dấu cho phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Với lưu ý rằng trên hàng cuối tại những điểm $Q(x) = 0$ ta sử dụng kí hiệu || để chỉ ra rằng tại đó bất phương trình không xác định.

Bước 3: Dựa vào kết quả bảng xét dấu, suy ra nghiệm cho bất phương trình.

Bài toán 4: Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Phương pháp thực hiện

Việc sử dụng dấu nhị thức bậc nhất để giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối được gọi là *phương pháp chia khoảng*. Với các phương trình, bất phương trình dạng:

$$P(x) = 0, P(x) > 0, P(x) < 0, P(x) \geq 0, P(x) \leq 0,$$

trong đó $P(x) = k_1|A_1| + k_2|A_2| + \dots + k_n|A_n|$ và dấu của các $A_i, i = \overline{1, n}$ được xác định thông qua dấu của những nhị thức bậc nhất, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đặt điều kiện có nghĩa cho các biểu thức trong phương trình, bất phương trình.

Bước 2: Lập bảng xét dấu các biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối $A_i, i = \overline{1, n}$ từ đó chia trục số thành những khoảng sao cho trong mỗi khoảng đó các biểu thức được dấu giá trị tuyệt đối chỉ nhận một dấu xác định.

Bước 3: Giải (hoặc biện luận) phương trình, bất phương trình trên mỗi khoảng đã chia.

Bước 4: Kết luận.

§6 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài toán tìm phương án tối ưu.

Phương pháp thực hiện

Tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Sử dụng hai ẩn phụ x, y để:

- Thiết lập các điều kiện cho bài toán, từ đó nhận được một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (gọi là (I)).
- Hàm tối ưu $F = f(x, y)$.

Bước 2: Xác định miền đa giác $A_1, A_2, \dots, A_n$ thỏa mãn hệ (I).

Bước 3: Tính các giá trị $F_1, F_2, \dots, F_n$ của hàm F tại các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Bước 4: Khi đó:

- $F_{\max} = \max\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$.
- $F_{\min} = \min\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$.

§7 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Định lý: Với tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta có:

a. Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a , với $\forall x \in \mathbb{R}$, tức là:
 $af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b. Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với a , với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$, tức là:

$$af(x) > 0, \forall x \neq -\frac{b}{2a} \text{ và } af(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

c. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 , giả sử là $x_1 < x_2$. Lúc đó:

- $f(x)$ cùng dấu với a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$.
- $f(x)$ trái dấu với a khi $x_1 < x < x_2$.

Trong trường hợp này ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	cùng dấu a	0	trái dấu a	0	cùng dấu a

§8 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài toán 1: Giải bất phương trình bậc hai.

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Chú ý:

1. Khi đã thành thạo việc xét dấu một tam thức bậc hai chúng ta không cần viết lại bảng xét dấu.

2. Với bài toán "Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất" ta thực hiện như sau.
 Xét hai trường hợp:
Trường hợp 1: Nếu $a = 0$ (nếu có).
Trường hợp 2: Nếu $a \neq 0$, thực hiện theo các bước.
Bước 3: Tính Δ (hoặc Δ') rồi lập bảng xét dấu chúng cho a và Δ (hoặc Δ').
Bước 4: Dựa vào bảng ta xét các trường hợp xảy ra.
Bước 5: Kết luận.

Bài toán 2: Giải bất phương trình tích và bất phương trình chứa ẩn ở mẫu.

Phương pháp thực hiện

Tương tự như bài toán 2 và bài toán 3 trong chủ đề 5.

Bài toán 3: Giải hệ bất phương trình bậc hai.

Phương pháp thực hiện

Giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được.

Bài toán 4: Giải phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng *phương pháp chia khoảng* thông qua việc lập bảng xét dấu các biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối có trong phương trình, bất phương trình.

Bài toán 5: Giải phương trình, bất phương trình chứa căn bậc hai.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng các phép biến đổi tương đương.

CHƯƠNG VI

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1 GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

"Cung tròn bán kính R có số đo góc a° ($0 \leq a \leq 360^\circ$) có độ dài $\frac{\pi a R}{180}$ ".

Với đường tròn bán kính R , ta có:

- Toàn bộ đường tròn có số đo radian bằng $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$.
- Cung có độ dài bằng l thì có số đo radian bằng $\frac{l}{R}$.

Từ đó, ta có các kết quả:

1. Cung tròn bán kính R có số đo α radian thì có độ dài αR .
2. Với cung tròn có độ dài l . Gọi α là số đo radian và a là số đo độ của cung đó thì ta thiết lập được mối quan hệ giữa số đo radian và số đo độ

$$\text{là } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}.$$

Hệ thức Sa – lơ

Với ba tia Ou, Ov, Ow , ta có:

$$\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

§2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức lượng giác chứa các cung đặc biệt.

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng các hệ quả trong bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt hoặc bằng việc biểu diễn góc trên đường tròn đơn vị.

Bài toán 2: Rút gọn biểu thức lượng giác.

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác.

Cần lưu ý rằng việc rút gọn biểu thức trong nhiều trường hợp là công việc cần thiết nhất trước khi thực hiện việc tính giá trị của biểu thức.

Bài toán 3: Tính giá trị của hàm số lượng giác, biểu thức lượng giác.

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả:

Dạng 1: Nếu biết giá trị của một trong bốn hàm số lượng giác để tính giá trị của các hàm số còn lại chúng ta cần thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định dấu của chúng.

Bước 2: Sử dụng các công thức:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ hoặc } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha, \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

Dạng 2: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác, cần tính giá trị của các hàm số lượng giác của một góc α , ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng chỉ chứa một hàm lượng giác rồi thực hiện phép đặt ẩn phụ (nếu cần) để giải một phương trình đại số.

Hướng 2: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích $A.B = 0$.

Hướng 3: Sử dụng bất đẳng thức để đánh giá.

Dạng 3: Giả sử biết giá trị của một biểu thức lượng giác (ký hiệu (1)), cần tính giá trị của biểu thức lượng giác khác (ký hiệu (2)), ta lựa chọn một trong các hướng sau:

Hướng 1: Biến đổi (1) rồi thay vào (2).

Hướng 2: Biến đổi (2) rồi sử dụng (1).

Hướng 3: Biến đổi đồng thời (1) và (2) dẫn tới biểu thức trung gian (3).

Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng hệ thức cơ bản và các hệ quả để thực hiện phép biến đổi tương đương.

§3 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

1. HAI GÓC ĐỐI NHAU

a. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$

b. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$

c. $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$

d. $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$

2. HAI GÓC HƠN KÉM NHAU π

a. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$

b. $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$

c. $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha.$

d. $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha.$

3. HAI GÓC BÙ NHAU

a. $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$

b. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$

c. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha.$

d. $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha.$

4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG PHỤ NHAU

a. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$

b. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$

c. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha.$

d. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha.$

Chú ý: Ta còn có được các mối liên hệ sau:

a. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha.$

b. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha.$

c. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha.$

d. $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha.$

§4 MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài toán 1: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tổng.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng các công thức lượng giác, thông thường là công thức biến đổi tích thành tổng.

Bài toán 2: Biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích.

Phương pháp thực hiện

Việc biến đổi biểu thức lượng giác về dạng tích phụ thuộc vào các phép biến đổi dạng:

Dạng 1. Biến đổi tổng, hiệu thành tích.

Dạng 2. Biến đổi tích thành tổng.

Dạng 3. Lựa chọn phép biến đổi cho $\cos 2x$.

Dạng 4. Phương pháp luận hệ số.

Dạng 5. Phương pháp hằng số biến thiên.

Dạng 6. Phương pháp nhân.

Dạng 7. Sử dụng các phép biến đổi hỗn hợp.

Kĩ năng biến đổi một biểu thức lượng giác về dạng tích là rất quan trọng bởi nó được sử dụng chủ yếu trong việc giải các phương trình lượng giác không mẫu mực.

Bài toán 3: Rút gọn biểu thức lượng giác.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng các công thức lượng giác cùng các phép biến đổi lượng giác.

Bài toán 4: Chứng minh đẳng thức lượng giác độc lập với biến số.

Phương pháp thực hiện

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để thực hiện phép rút gọn biểu thức lượng giác.

Bài toán 5: Tính giá trị của biểu thức lượng giác.

Phương pháp thực hiện

Thông thường ta thực hiện các phép biến đổi lượng giác để đơn giản biểu thức cần tính giá trị.

Bài toán 6: Chứng minh đẳng thức lượng giác.

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Dùng công thức lượng giác biến đổi một vế thành vế còn lại (VT $\Rightarrow$ VP hoặc VP $\Rightarrow$ VT). Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vẽ phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vẽ đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Để ý rằng một biểu thức lượng giác có thể được biến đổi thành nhiều dạng khác nhau. Chẳng hạn ta có:

$$\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x).$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) \text{ hoặc } \sin^2 2x = 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x.$$

Tuỳ theo mỗi bài toán, ta lựa chọn công thức thích hợp để biến đổi.

PHẦN: HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

VECTƠ

§1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Vectơ* là một đoạn thẳng có hướng:

- Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn
- Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của vectơ
- Độ dài của đoạn thẳng gọi là độ dài của vectơ.
- Đường thẳng đi qua điểm gốc và điểm ngọn được gọi là giá của vectơ.

Định nghĩa: *Vectơ không* là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

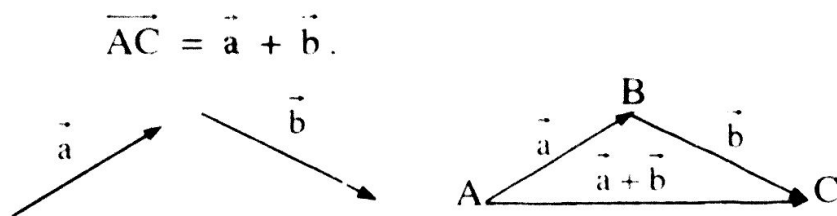
Định nghĩa: Hai vectơ gọi là **cùng phương** nếu chúng nằm trên hai đường thẳng song song, hoặc cùng trên một đường thẳng.

Định nghĩa: Hai vectơ gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

§2 TỔNG CỦA HAI VECTƠ

Định nghĩa: *Tổng của hai vectơ* $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ được xác định như sau:

- Từ một điểm tùy ý A trên mặt phẳng dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.
- Từ điểm B dựng vectơ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.
- Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ gọi là vectơ tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta viết



Quy tắc ba điểm:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \text{ với ba điểm A, B, C bất kì.}$$

Tính chất của phép cộng vectơ

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$, ta có:

Tính chất 1: (Tính chất giao hoán): $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Tính chất 2: (Tính chất kết hợp): $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Tính chất 3: (Tính chất của vectơ không): $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Quy tắc hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \text{ với ABCD là hình bình hành.}$$

Tính chất trung điểm:

$$\text{Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Tính chất trọng tâm của tam giác:

$$\text{Gọi G là trọng tâm } \Delta ABC \text{ thì } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

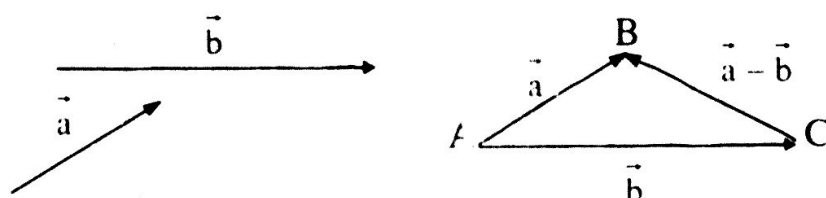
§3 HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Định nghĩa: Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$, nghĩa là:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Phép lấy hiệu của hai vectơ gọi là phép trừ vectơ.

Để dựng vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ khi biết các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta lấy điểm A tùy ý, từ đó dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, khi đó $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$.



Quy tắc hiệu hai vector cùng gốc:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}, \text{ với ba điểm A, B, C bất kì.}$$

Tính chất của phép trừ vector

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}.$$

§4 TÍCH CỦA MỘT VECTOR VỚI MỘT SỐ

Định nghĩa: Tích của vector $\vec{a}$ với một số thực k là một vector, kí hiệu $k\vec{a}$ được xác định như sau:

- Vector $k\vec{a}$ cùng phương với vector $\vec{a}$ và sẽ:
 - Cùng hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$.
 - Ngược hướng với vector $\vec{a}$ nếu $k < 0$.
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một vector với một số gọi là **phép nhân vector với số** (hoặc phép nhân số với vector).

Từ định nghĩa trên ta có ngay các kết quả:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Tính chất của phép nhân vector với số

Với mọi vector $\vec{a}, \vec{b}$ và các số thực m, n , ta có:

Tính chất 1: $m(n \cdot \vec{a}) = (mn) \cdot \vec{a}.$

Tính chất 2: $(m + n) \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{a}.$

Tính chất 3: $m(\vec{a} + \vec{b}) = m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b}.$

Tính chất 4: $m\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ hoặc } m = 0.$

Bài toán 1: Chứng minh một đẳng thức vector.

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong các hướng biến đổi sau:

Hướng 1: Biến đổi một vế thành vế còn lại ($VT \Rightarrow VP$ hoặc $VP \Rightarrow VT$).
Khi đó:

- Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- Nếu xuất phát từ vế đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích vector.

Hướng 2: Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.

Hướng 3: Biến đổi một đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Hướng 4: Tạo dựng các hình phụ.

Khi thực hiện các phép biến đổi ta sử dụng:

- Quy tắc ba điểm:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

- Quy tắc hình bình hành: Với hình bình hành ABCD luôn có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

- Hiệu hai vectơ cùng gốc

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

- Tính chất trung điểm: Với điểm M tùy ý và I là trung điểm của AB luôn có:

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$

- Tính chất trọng tâm tam giác: Với ΔABC có trọng tâm G ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \text{ với M tùy ý.}$$

- Các tính chất của phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ.

Bài toán 2: Xác định điểm M thỏa một đẳng thức vectơ cho trước.

Phương pháp thực hiện

Ta biến đổi đẳng thức vectơ cho trước về dạng:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{v},$$

trong đó điểm O cố định và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

Bài toán 3: Chứng minh hai điểm trùng nhau.

Phương pháp thực hiện

Muốn chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm tùy ý.

Bài toán 4: Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Phương pháp thực hiện

Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta đi chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}, k \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Sử dụng các quy tắc biến đổi vectơ đã biết.

Hướng 2: Xác định vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

Chú ý Ta có kết quả:

“ Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là:

$$\overrightarrow{MC} = \alpha \overrightarrow{MA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{MB},$$

với điểm tùy ý M và số thực α bất kỳ”.

Bài toán 5: Xác định đặc tính K của đối tượng S khi nó thỏa mãn một đẳng thức vector.

Phương pháp thực hiện

Phân tích được định tính xuất phát từ các đẳng thức vector của giả thiết.

Lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác.

Bài toán 6: Biểu diễn một vector thành tổ hợp vector.

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai hướng:

Hướng 1: Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vector cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vector cùng gốc.

Hướng 2: Từ giả thiết thiết lập được mối liên hệ vector giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm hoặc hiệu của hai vector cùng gốc.

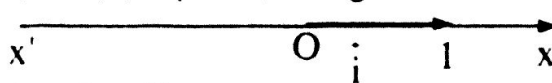
§5 TRỤC TOA ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOA ĐỘ

1. TRỤC TOA ĐỘ

Trục tọa độ (còn gọi là **trục**, hay **trục số**) là một đường thẳng trên đó xác định một điểm O và một vector $\vec{i}$ có độ dài bằng 1.

Trục tọa độ như vậy được kí hiệu là $(O, \vec{i})$ (hoặc Ox) trong đó:

- Điểm O gọi là **gốc tọa độ**.



- Vector $\vec{i}$ gọi là **vector đơn vị** của trục tọa độ.

Tọa độ của vector và của điểm trên trục

Ta có nhận xét sau:

- Với vector $\vec{u}$ nằm trên trục $(O, \vec{i})$ thì tồn tại duy nhất số a để $\vec{u} = a\vec{i}$. Khi đó, số a được gọi là **tọa độ của vector $\vec{u}$ đối với trục $(O, \vec{i})$**
- Với điểm M nằm trên trục $(O, \vec{i})$ thì tồn tại duy nhất số m để $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$. Khi đó, số m được gọi là **tọa độ của điểm M đối với trục $(O, \vec{i})$** (cũng chính là tọa độ của vector $\overrightarrow{OM}$).

Độ dài đại số của vectơ trên trục

Nếu hai điểm A, B nằm trên trục Ox thì tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\overline{AB}$ gọi là **độ dài đại số** của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox.

HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Hệ trục tọa độ vuông góc (còn gọi là **hệ trục tọa độ**) bao gồm hai trục tọa độ Ox và Oy vuông góc với nhau (kí hiệu là Oxy hoặc $(O; \vec{i}, \vec{j})$).

- Vectơ đơn vị trên Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị trên Oy là $\vec{j}$.
- Điểm O gọi là **gốc tọa độ**. Trục Ox gọi là **trục hoành**, trục Oy gọi là **trục tung**.

Chú ý: Khi trong mặt phẳng đã cho một hệ trục tọa độ, ta sẽ gọi đó là **mặt phẳng tọa độ**.

3. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ ĐỐI VỚI HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

Định nghĩa: Đối với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x, y) được gọi là **tọa độ** của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} = (x, y)$ hay $\vec{a}(x, y)$. Số thứ nhất x gọi là **hoành độ**, số thứ hai y gọi là **tung độ** của vectơ $\vec{a}$.

4. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Nếu có hai vectơ $\vec{a}(x_a, y_a)$ và $\vec{b}(x_b, y_b)$ thì:

(i): $\vec{a} + \vec{b} = (x_a + x_b, y_a + y_b)$ và $\vec{a} - \vec{b} = (x_a - x_b, y_a - y_b)$.

(ii): $k\vec{a}(x_a, y_a) = (kx_a, ky_a)$, $k \in \mathbb{R}$.

(iii): $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b}$.

5. TOẠ ĐỘ CỦA ĐIỂM

Định nghĩa: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **tọa độ của điểm M**.

Với ba điểm $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ và $C(x_C, y_C)$, ta có các kết quả sau:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A),$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Nếu I là trung điểm AB thì $I(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$.

Nếu G là trọng tâm $\triangle ABC$ thì $G(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3})$.

CHƯƠNG II

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ (từ 0° đến 180°)

Giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

- | | |
|---|---|
| a. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$ | c. $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$ |
| b. $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$ | d. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha.$ |

Hàm số lượng giác của hai góc phụ nhau

- | | |
|---|---|
| a. $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$ | c. $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha.$ |
| b. $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$ | d. $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$ |

Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt

Góc	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\parallel$

Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$
- $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ và $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha.$

§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Bài toán 1: Tính tích vô hướng của hai vectơ.

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong các cách sau:

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa bằng cách đưa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ về cùng gốc để xác định được góc $\alpha = (\vec{a}, \vec{b})$, từ đó:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

Phương pháp 2: Sử dụng các tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ.

Phương pháp 3: Sử dụng định lý hình chiếu: với A' , B' là hình chiếu của A , B lên giá của $\overrightarrow{CD}$, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Phương pháp 4: Sử dụng biểu thức tọa độ.

Bài toán 2: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài.

Phương pháp thực hiện

Ta có hai dạng:

Dạng 1: Với các biểu thức về tích vô hướng, ta sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của tích vô hướng, cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi.

Dạng 2: Với các biểu thức về độ dài, ta thường sử dụng $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$.

Bài toán 3: Chứng minh tính vuông góc – Thiết lập điều kiện vuông góc.

Phương pháp thực hiện

Ta dùng định lý:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{b} = \vec{0} \\ \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \end{cases}.$$

Ngoài ra, ta còn sử dụng các tính chất của tích vô hướng.

Chú ý: Nếu $\vec{a}(a_1, a_2)$ và $\vec{b}(b_1, b_2)$ thì điều kiện $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$.

Bài toán 4: Sử dụng tích vô hướng giải các bài toán định lượng, định tính.

Phương pháp thực hiện

1. Với các bài toán định lượng, ta sử dụng các kết quả:

a. Gọi α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

b. Để tính độ dài đoạn AB , ta thực hiện:

$$AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

rồi thực hiện phép phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ thành tổ hợp các vectơ cơ sở.

2. Với các bài toán định tính, ta biến đổi điều kiện ban đầu thành biểu thức của tích vô hướng, rồi từ đó dẫn tới

$$\begin{cases} \vec{a} \perp \vec{b} \\ \vec{a} // \vec{b} \end{cases},$$

từ đó đưa ra lời kết luận cho bài toán.

Bài toán 5: Tìm điểm M thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài.

Phương pháp thực hiện

Ta biến đổi biểu thức ban đầu về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $AM^2 = k > 0$, thì M thuộc đường tròn tâm A, bán kính $R = \sqrt{k}$.

Dạng 2: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$, với A, B cố định và k không đổi. Khi đó:

- Gọi I là trung điểm AB, ta được:

$$\begin{aligned} k &= \vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) \\ &= (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = MI^2 - IA^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = k + IA^2 = k + \frac{AB^2}{4} = l.$$

- Khi đó:

- Nếu $l < 0$ thì M không tồn tại.
- Nếu $l = 0$ thì $M \equiv I$.
- Nếu $l > 0$ thì M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $R = \sqrt{l}$.

Mở rộng: Nếu ta có $\vec{MA} \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = k$, với A, A_i , $i = 1, n$ cố

định, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$ và k không đổi. Khi đó:

- Gọi K là điểm thỏa mãn:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{KA}_i = \vec{0} \Rightarrow \text{tồn tại duy nhất điểm cố định K.}$$

- Từ đó:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MA}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \vec{MK} = \alpha \vec{MK}, \text{ với } \alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

- Khi đó, ta được $\vec{MA} \cdot \vec{MK} = \frac{k}{\alpha}$.

Dạng 3: $\vec{MA} \cdot \vec{BC} = k$, với A, B, C cố định. Khi đó:

- Gọi M_0 , A_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, A lên BC, ta được:

$$k = \vec{MA} \cdot \vec{BC} = \vec{M_0A_0} \cdot \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{M_0A_0} = \frac{k}{\vec{BC}},$$

có giá trị không đổi và do A_0 cố định nên M_0 cố định.

- Vậy điểm M thuộc đường thẳng vuông góc với BC tại M_0 .
Đặc biệt khi $k = 0$ thì M thuộc đường thẳng qua A vuông góc với BC.

Bài toán 6: Sử dụng biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng kết quả:

Nếu $\vec{a} (a_1, a_2)$, $\vec{b} (b_1, b_2)$ và α là góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.
- $\cos \alpha = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

§3 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. ĐỊNH LÍ CÔSIN TRONG TAM GIÁC

Trong ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA; b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB; c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC.$$

2. ĐỊNH LÍ SIN TRONG TAM GIÁC

Trong ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

3. TỔNG BÌNH PHƯƠNG HAI CẠNH VÀ ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

Trong ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và các đường trung tuyến tương ứng là m_a , m_b , m_c , ta có:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}; \quad c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2}; \quad a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}.$$

4. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Trong ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và các đường cao tương ứng là h_a , h_b , h_c , ta có:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

$$S = \frac{1}{2} bcsinA = \frac{1}{2} acsinB = \frac{1}{2} absinC$$

$$S = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

(với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp).

CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1 ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1: Phương trình đường thẳng.

Phương pháp thực hiện

Phương trình:

$$Ax + By + C = 0$$

là phương trình của một đường thẳng khi và chỉ khi $A^2 + B^2 > 0$.

Bài toán 2: Lập phương trình đường thẳng.

Phương pháp thực hiện

Ta sử dụng các kết quả:

1. Đường thẳng đi qua hai điểm:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_1(x_1, y_1) \\ \text{Qua } M_2(x_2, y_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Lưu ý:

- Nếu $M_1(a, 0)$ và $M_2(0, b)$ với $a, b \neq 0$ thì phương trình (M_1M_2) được xác định bằng phương trình đoạn chắn $(M_1M_2): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

- Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0, y_0)$ luôn có dạng:

$$(d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \text{ với } A^2 + B^2 > 0.$$

2. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtcp:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vtcp } \vec{a}(a_1, a_2) \end{cases} \Leftrightarrow (d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

$$\text{hoặc } (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{a}(a_1, a_2)$ luôn có dạng:

$$(d): a_2x - a_1y + \underline{C} = 0.$$

3. Đường thẳng đi qua một điểm và biết vtpt:

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{vt } \vec{n}(A, B) \end{cases} \Leftrightarrow (d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có vtpt $\vec{n}(n_1, n_2)$ luôn có dạng:

$$(d): n_1x + n_2y + \underline{C} = 0.$$

4. Đường thẳng đi qua một điểm và biết hệ số góc k :

$$(d): \begin{cases} \text{Qua } M_0(x_0, y_0) \\ \text{hsg } k \end{cases} \Leftrightarrow (d): y = k(x - x_0) + y_0.$$

Lưu ý: Đường thẳng (d) có hệ số góc k luôn có dạng:

$$(d): y = kx + \underline{m} = 0.$$

5. Đường thẳng $(d) // (\Delta): Ax + By + C = 0$ có phương trình:

$$(d): Ax + By + \underline{D} = 0.$$

6. Đường thẳng $(d) \perp (\Delta): Ax + By + C = 0$ có phương trình:

$$(d): Bx - Ay + \underline{D} = 0.$$

Chú ý: Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng

- Phương trình chùm đường thẳng.
- Phương pháp quỹ tích để xác định phương trình đường thẳng.

Bài toán J: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Phương pháp thực hiện

Nếu hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có phương trình tổng quát:

$$(d_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad (d_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng (d_1) , (d_2) , ta sử dụng kết quả:

a. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1) // (d_2).$

b. Nếu $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow (d_1) \equiv (d_2).$

c. Nếu $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \Leftrightarrow (d_1) \text{ cắt } (d_2).$

Các trường hợp khác thì bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi hai đường thẳng (d_1) và (d_2) khi đó số nghiệm của hệ phương trình cho phép kết luận về vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Bài toán 4: Điểm và đường thẳng.

Phương pháp thực hiện

Để tìm điểm M thuộc đường thẳng (d) thoả mãn điều kiện K , ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Tận dụng phương trình đường thẳng (d) cho trước.

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tham số :

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Bước 1: Lấy điểm $M \in (d)$, suy ra $M(x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t).$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K xác định t .

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho dưới dạng tổng quát:

$$(d): Ax + By + C = 0, \text{ với } A^2 + B^2 > 0.$$

Bước 1: Lấy điểm $M(x_M, y_M) \in (d)$, suy ra

$$Ax_M + By_M + C = 0.$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K thiết lập thêm một phương trình cho x_M và y_M .
Từ đó tìm được toạ độ của M.

Lưu ý: Khi đó cũng có thể chuyển phương trình (d) về dạng tham số để sử dụng cách 1

Hướng 2: Sử dụng điều kiện K khẳng định M thuộc đường (L), khi đó

$$(d) \cap (L) = \{M\}.$$

§2 ĐƯỜNG TRÒN

Bài toán 1: Lập phương trình đường tròn thoả mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp thực hiện

Gọi (C) là đường tròn thoả mãn điều kiện đầu bài. Chúng ta lựa chọn phương trình dạng tổng quát hoặc dạng chính tắc.

- Muốn có phương trình dạng tổng quát, ta lập hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, c , điều kiện $a^2 + b^2 - c \geq 0$.
- Muốn có phương trình dạng chính tắc, ta lập hệ 3 phương trình với ba ẩn a, b, R , điều kiện $R \geq 0$.

Chú ý

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp.
2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình đường tròn.

Bài toán 2: Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và đường tròn.

Phương pháp thực hiện

1. Để xét vị trí tương đối của điểm với đường tròn, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với đường tròn (C) là $\mathcal{P}_{M/(C)}$.

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $\mathcal{P}_{M/(C)} < 0 \Leftrightarrow M$ nằm trong đường tròn.
- Nếu $\mathcal{P}_{M/(C)} = 0 \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn.
- Nếu $\mathcal{P}_{M/(C)} > 0 \Leftrightarrow M$ nằm ngoài đường tròn.

Chú ý Ta có các kết quả sau:

- Nếu M nằm trong (C) $\Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến của (C) đi qua M nhưng khi đó mọi đường thẳng qua M đều cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.
- Nếu M nằm trên (C) $\Rightarrow$ tồn tại duy nhất 1 tiếp tuyến của (C) đi qua M (phương trình tiếp tuyến có được bằng phương pháp phân đôi toạ độ).
- Nếu M nằm ngoài (C) $\Rightarrow$ tồn tại hai tiếp tuyến của (C) đi qua M.

2. Để xét vị trí tương đối của đường thẳng với đường tròn, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính khoảng cách h từ I tới (d) , rồi so sánh với bán kính R của đường tròn, ta được:

- Nếu $h > R \Leftrightarrow (d) \cap (C) = \{\emptyset\}$.
- Nếu $h = R \Leftrightarrow (d)$ tiếp xúc với (C) .
- Nếu $h < R \Leftrightarrow (d)$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B .

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (C) và (d) , khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (C) .

Chú ý: Trong trường hợp đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt ta có khái niệm chùm đường tròn dạng 1:

" Phương trình đường tròn đi qua giao điểm của đường thẳng

$$(d): Ax + By + C = 0,$$

$$(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c + m(Ax + By + C) = 0. "$$

3. Để xét vị trí tương đối của hai đường tròn, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Tính khoảng cách I_1I_2 (I_1, I_2 là hai tâm của hai đường tròn), rồi so sánh với tổng và hiệu hai bán kính R_1, R_2 của hai đường tròn, ta được:

- Nếu $I_1I_2 > R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $I_1I_2 < |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không cắt nhau và lồng nhau.
- Nếu $I_1I_2 = R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài với nhau.
- Nếu $I_1I_2 = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Phương pháp này thường được sử dụng để xác định số nghiệm của bài toán tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Cách 2: Xét hệ phương trình tạo bởi (C_1) và (C_2) , khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C_1) và (C_2) .

Nhận xét quan trọng:

1. Bằng việc xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn chúng ta có thể ứng dụng để giải các hệ đại số, dạng:

Dạng 1: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(m)x - 2b(m)y + c(m) = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a(m)x - 2b(m)y + c(m) \geq 0 \\ Ax + By + C \geq 0 \end{cases}$$

2. Bằng việc xét vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn, chúng ta có thể ứng dụng để giải các hệ đại số, dạng:

Dạng 1 Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1(m)x - 2b_1(m)y + c_1(m) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2(m)x - 2b_2(m)y + c_2(m) = 0 \end{cases}$$

Dạng 2 Giải và biện luận hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1(m)x - 2b_1(m)y + c_1(m) \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2a_2(m)x - 2b_2(m)y + c_2(m) \leq 0 \end{cases}$$

Bài toán 3: Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) (tâm I(a, b) bán kính R) thỏa mãn điều kiện K.

Phương pháp thực hiện

Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Dựa trên điều kiện K, ta giả sử được đường thẳng (d) có phương trình:

$$(d): Ax + By + C = 0.$$

Bước 2: (d) là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I, (d)) = R.$$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến (d).

Chú ý: Điều kiện K thường gặp:

1. Tiếp tuyến đi qua điểm M cho trước, khi đó:

a. Nếu $M(x_0, y_0) \in (C)$ (tức là $\mathcal{P}_{M/(C)} = 0$), ta có ngay:

$$(d): \begin{cases} \text{qua } M(x_0, y_0) \\ \text{vtpđ } \overline{IM}(x_0 - a, y_0 - b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (d): (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (d): (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = R^2 \quad \text{-- Phân đôi tọa độ.}$$

b. Nếu $M(x_0, y_0) \notin (C)$ (tức là $\mathcal{P}_{M/(C)} \neq 0$), ta giả sử:

$$(d): A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (d): Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$, khi đó:

$$(d): Ax + By + \underline{D} = 0.$$

3. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$, khi đó:

$$(d): Bx - Ay + \underline{D} = 0.$$

4. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng k, khi đó:

$$(d): y = kx + \underline{m} \Leftrightarrow (d): kx - y + \underline{m} = 0.$$

5. Tiếp tuyến có tạo với đường thẳng (Δ) một góc α , khi đó ta linh hoạt sử dụng một trong hai công thức:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ với } \vec{a}, \vec{b} \text{ theo thứ tự là vtcp của (d), } (\Delta).$$

$$\tan\alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|, \text{ với } k_1, k_2 \text{ theo thứ tự là hsg của (d), } (\Delta)$$

Cách 2: Đi tìm tiếp điểm rồi sử dụng phương pháp phân đôi tọa độ để giải.

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm, khi đó:

Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$x \cdot x_0 + y \cdot y_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0. \quad (1)$$

$$(\text{hoặc } (x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = R^2).$$

Điểm $M \in (C)$

$$\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0 \quad (2)$$

$$(\text{hoặc } (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2)$$

Bước 2: Sử dụng điều kiện K của giả thiết, ta thiết lập thêm một phương trình theo x_0, y_0 (3)

Bước 3: Giải hệ tạo bởi (2), (3) ta được tọa độ tiếp điểm $M(x_0, y_0)$, từ đó thay vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến cần xác định.

Bài toán 4: Lập phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (C_1) và (C_2) .

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử (d): $Ax + By + C = 0$, với $A^2 + B^2 > 0$ là tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Bước 2: Thiết lập điều kiện tiếp xúc của (d) với (C_1) và (C_2)

$$d(I_1, (d)) = R_1 \text{ \& } d(I_2, (d)) = R_2.$$

Bước 3: Kết luận về tiếp tuyến chung (d).

Bài toán 5: Điểm và đường tròn.

Phương pháp thực hiện

Để tìm điểm M thuộc đường tròn (C) : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ thoả mãn điều kiện K, ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$, suy ra:

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2.$$

Bước 4: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0 .

§3 ĐƯỜNG ELÍP

Bài toán 1: Xác định các thuộc tính của Elíp (E)

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Elíp (E) về dạng chính tắc

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bước 2: Xét các khả năng:

Khả năng 1: Nếu $a > b$, ta được:

- (E) có trục lớn thuộc Ox, độ dài bằng $2a$ chứa hai tiêu điểm

$$F_1(-c, 0), F_2(c, 0) \text{ với } c^2 = a^2 - b^2.$$

- (E) có trục nhỏ thuộc Oy với độ dài bằng $2b$.

- Tâm sai $e = \frac{c}{a}$.

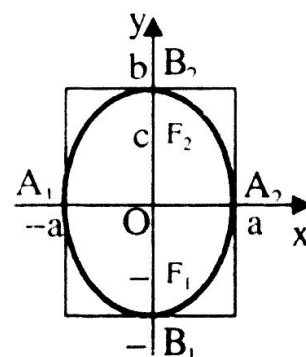
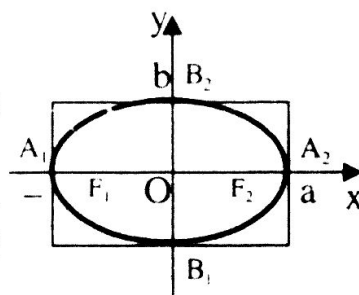
Khả năng 2: Nếu $a < b$, ta được:

- (E) có trục lớn thuộc Oy, độ dài bằng $2b$ chứa hai tiêu điểm

$$F_1(0, -c), F_2(0, c) \text{ với } c^2 = b^2 - a^2.$$

- (E) có trục nhỏ thuộc Ox với độ dài bằng $2a$.

- Tâm sai $e = \frac{c}{b}$.



Chú ý: Trong trường hợp phương trình của (E) có dạng:

$$(E): \frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1.$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vector $\vec{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(E): \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

từ đó chỉ ra các thuộc tính của (E) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (E) trong hệ trục Oxy.

Bài toán 2: Lập phương trình của Elíp (E).

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Elíp

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

Nếu biết hai tiêu điểm $F_1(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)$ và độ dài trục lớn bằng $2a$ thì ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x, y) \in (E)$.

Bước 2: Chuyển $MF_1 + MF_2 = 2a$ (1)

thành biểu thức giải tích nhờ:

$$MF_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \quad (2)$$

$$MF_2^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \quad (3)$$

Bước 3: Suy ra

$$\begin{aligned} MF_1 - MF_2 &= \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2} \\ &= \frac{(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) - 2x(x_1 - x_2) - 2y(y_1 - y_2)}{2a} \quad (4) \end{aligned}$$

Bước 4: Lấy (1) + (4) ta được MF_1 , rồi thay vào (2) ta sẽ được phương trình của (E).

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Elíp (E) có phương trình:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình Elíp hoặc chứng minh tập hợp điểm là Elíp.

Bài toán 3: Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và elíp.

Phương pháp thực hiện

1. Để xác định vị trí tương đối của điểm $M(x_M, y_M)$ với Elíp (E):

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 3: Xác định phương tích của M đối với Elíp (E) là:

$$\mathcal{P}_{M/(E)} = \frac{x_M^2}{a^2} + \frac{y_M^2}{b^2}.$$

Bước 4: Kết luận:

- Nếu $\mathcal{P}_{M/(E)} < 1 \Leftrightarrow M$ nằm trong Elíp.
- Nếu $\mathcal{P}_{M/(E)} = 1 \Leftrightarrow M$ nằm trên Elíp.
- Nếu $\mathcal{P}_{M/(E)} > 1 \Leftrightarrow M$ nằm ngoài Elíp.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

- Nếu M nằm trong $(E) \Rightarrow$ không tồn tại tiếp tuyến của (E) đi qua M nhưng khi đó mọi đường thẳng qua M đều cắt (E) tại 2 điểm phân biệt.
 - Nếu M nằm trên $(E) \Rightarrow$ tồn tại duy nhất 1 tiếp tuyến của (E) đi qua M (phương trình tiếp tuyến có được bằng phương pháp phân đôi tọa độ).
 - Nếu M nằm ngoài $(E) \Rightarrow$ tồn tại hai tiếp tuyến của (E) đi qua M .
2. Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (E) và (d) , khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (E) .
3. Với hai Elíp (E_1) và (E_2) có phương trình:

$$(E_1): \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \text{ và } (E_2): \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1$$

Nếu $E_1) \cap (E_2) = \{A, B, C, D\}$ thì

- a. ABCD là hình chữ nhật.
- b. Phương trình đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD là đường tròn (C) tâm O bán kính $R = OA$ có phương trình:

$$(C): x^2 + y^2 = \frac{a_1^2 a_2^2 (b_1^2 - b_2^2) + b_1^2 b_2^2 (a_2^2 - a_1^2)}{a_2^2 b_1^2 - a_1^2 b_2^2}.$$

Bài toán 4: Điểm và elíp.

Phương pháp thực hiện

Với Elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0 . Từ đó suy ra tọa độ điểm M .

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Elíp về dạng tham số:

$$(E): \begin{cases} x = a \sin t \\ y = b \cos t \end{cases}, t \in [0, 2\pi).$$

Bước 2: Điểm $M \in (E) \Rightarrow M(a \cdot \sin t, b \cdot \cos t).$

Bước 3: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho t . Từ đó suy ra tọa độ điểm M .

Chú ý: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm, ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ điểm đó là:

$$F_1M = a + \frac{cx_0}{a} \text{ và } F_2M = a - \frac{cx_0}{a}.$$

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc, ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Elíp với một đường khác, ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

§4 ĐƯỜNG HYPEBOL

Bài toán 1: Xác định các thuộc tính của Hypebol (H).

Phương pháp thực hiện

T. thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Hypebol (H) về dạng chính tắc

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Bước 2: Xét các khả năng:

Khả năng 1: Nếu

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ta được:

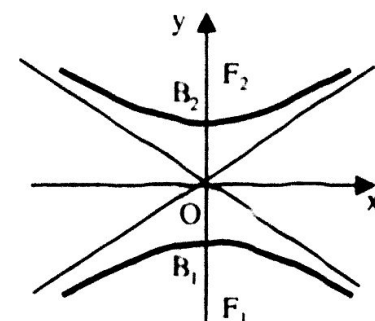
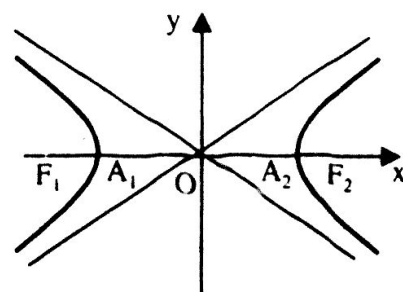
- (H) có trục thực thuộc Ox, độ dài bằng 2a chứa hai tiêu điểm $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ với $c^2 = a^2 + b^2$.
- (H) có trục ảo thuộc Oy với độ dài bằng 2b.
- Tâm sai $e = \frac{c}{a}$.

Khả năng 2: Nếu

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

ta được:

- (H) có trục thực thuộc Oy, độ dài bằng 2b chứa hai tiêu điểm $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ với $c^2 = a^2 + b^2$.
- (H) có trục ảo thuộc Ox với độ dài bằng 2a.
- Tâm sai $e = \frac{c}{b}$.



Bài toán 2: Lập phương trình của Hypebol (H)

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Hypebol

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Từ đó cần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa.

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình Hypebol hoặc chứng minh tập hợp điểm là Hypebol, trong trường hợp này chúng ta thường thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh tập hợp điểm là Hypebol (H) bằng việc chỉ ra hai điểm cố định A, B và M thoả mãn $|MA - MB| = 2a$ – không đổi.

Bước 2: Lập phương trình chính tắc của Hypebol (H) nhận A, B làm tiêu điểm và có độ dài trục thực bằng $2a$.

Bài toán 3: Xét vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và Hypebol.

Phương pháp thực hiện

Bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (H) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (H).

Bài toán 4: Điểm và Hypebol.

Phương pháp thực hiện

Với Hypebol (H) có phương trình:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (H)$ suy ra

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0 . Từ đó suy ra toạ độ điểm M.

Cách 2: Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình Hypebol về dạng tham số:

$$(H): \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t} \\ y = b \tan t \end{cases}, t \in [0, 2\pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

Bước 2: Điểm $M \in (H) \Rightarrow M(a \cdot \sin t, b \cdot \cos t)$.

Bước 3: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho t. Từ đó suy ra tọa độ điểm M.

Chú ý: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thỏa mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo tọa độ điểm đó là:

Điểm $M(x, y) \in (H)$ luôn có:

a. $F_1M = \frac{cx}{a} + a$ và $F_2M = \frac{cx}{a} - a$ với $x > 0$.

b. $F_1M = -\frac{cx}{a} - a$ và $F_2M = -\frac{cx}{a} + a$ với $x < 0$.

2. Nếu điểm phải tìm thỏa mãn điều kiện về góc, ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Hypebol với một đường khác, ta xét hệ phương trình tương giao để tìm tọa độ giao điểm.

§5 ĐƯỜNG PARABOL

Bài toán 1: Xác định các thuộc tính của Parabol (P).

Phương pháp thực hiện

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình ban đầu của Parabol (P) về dạng chính tắc

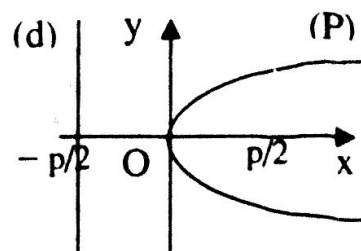
$$(P): y^2 = \pm 2px \text{ hoặc } (P): x^2 = \pm 2py.$$

Bước 2: Xét các khả năng:

Dạng 1: Parabol (P): $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

Các thuộc tính của (P) gồm:

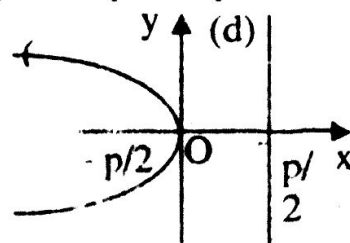
- Đỉnh $O(0, 0)$,
- Tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$,
- Đường chuẩn (d): $x = -\frac{p}{2}$,
- Parabol nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị ở bên phải Oy.



Dạng 2: Parabol (P): $y^2 = -2px$ ($p > 0$)

Các thuộc tính của (P) gồm:

- Đỉnh $O(0, 0)$,
- Tiêu điểm $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$,



- Đường chuẩn (d): $x = \frac{p}{2}$,

- Parabol nhận Ox làm trục đối xứng, đồ thị có hướng lên trên.

Dạng 3: Parabol (P): $x^2 = 2py$ ($p > 0$)

Các thuộc tính của (P) gồm:

- Đỉnh $O(0, 0)$,

- Tiêu điểm $F(0, \frac{p}{2})$,

- Đường chuẩn (d): $y = -\frac{p}{2}$.

- Parabol nhận Oy làm trục đối xứng, đồ thị có hướng lên trên.

Dạng 4: Parabol (P): $x^2 = -2py$ ($p > 0$)

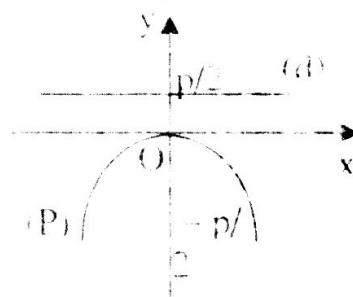
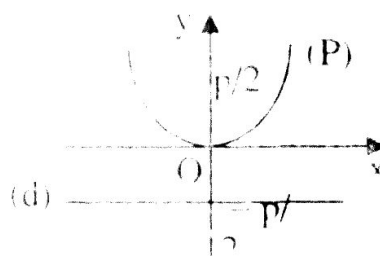
Các thuộc tính của (P) gồm:

- Đỉnh $O(0, 0)$,

- Tiêu điểm $F(0, -\frac{p}{2})$,

- Đường chuẩn (d): $y = \frac{p}{2}$,

- Parabol, nhận Oy làm trục đối xứng, đồ thị có hướng xuống dưới.



Chú ý: Trong trường hợp phương trình của (P) có dạng

$$(P): (y - \beta)^2 = \pm 2p(x - \alpha) \text{ hoặc } (P): (x - \alpha)^2 = \pm 2p(y - \beta).$$

ta thực hiện phép tịnh tiến hệ trục Oxy theo vector $\vec{OI}$ với $I(\alpha, \beta)$ thành hệ trục IXY với công thức đổi trục:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

ta được:

$$(P): Y^2 = \pm 2pX \text{ hoặc } (P): X^2 = \pm 2pY.$$

từ đó chỉ ra các thuộc tính của (P) trong hệ trục IXY rồi suy ra các thuộc tính của (P) trong hệ trục Oxy.

Bài toán 2: Lập phương trình của Parabol (P).

Phương pháp thực hiện

Ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương trình chính tắc của Parabol

$$(P): y^2 = 2px \text{ hoặc } (P): x^2 = 2py.$$

Từ đó lần tìm a, b (hoặc a^2, b^2) bằng cách thiết lập một hệ hai phương trình với ẩn a, b (hoặc a^2, b^2).

Cách 2: Sử dụng định nghĩa

Bước 1: Lấy điểm $M(x, y) \in (P)$ có tiêu điểm F và đường chuẩn (d).

Bước 2: Chuyển $MF = MH$ thành biểu thức giải tích nhờ:

$$MF^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 \text{ và } MH = d(M, (d)).$$

Bước 3: Thu gọn.

Chú ý:

1. Cần phải cân nhắc giả thiết của bài toán thật kỹ càng để lựa chọn dạng phương trình thích hợp. Trong trường hợp không có gì đặc biệt, ta luôn giả sử Parabol (P) có phương trình:

$$(P): y^2 = 2px.$$
2. Trong nhiều trường hợp đặc thù chúng ta còn sử dụng phương pháp quỹ tích để xác định phương trình Parabol hoặc chứng minh tập hợp điểm là Parabol.

Bài toán 3: Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng và Parabol.**Phương pháp thực hiện**

1. Xét vị trí tương đối của điểm $M(x_0, y_0)$ với Parabol (P) : $y^2 = 2px$, ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Xác định phương tích của M đối với Parabol (P) là :

$$P_{M/(P)} = y_0^2 - 2px_0.$$

Bước 2: Kết luận:

- Nếu $P_{M/(P)} < 0 \Leftrightarrow M$ nằm trong Parabol.
- Nếu $P_{M/(P)} = 0 \Leftrightarrow M$ nằm trên Parabol.
- Nếu $P_{M/(P)} > 0 \Leftrightarrow M$ nằm ngoài Parabol.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

- $M(x, y) \in \text{miền trong của } (P) \Rightarrow$ qua M không thể kẻ được tiếp tuyến tới (P).
 - $M(x, y) \in \text{miền ngoài của } (P) \Rightarrow$ qua M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (P).
 - $M(x, y)$ nằm trên (P) $\Rightarrow$ qua M kẻ được một tiếp tuyến tới (P).
2. Xét vị trí tương đối của đường thẳng với Parabol bằng việc xét hệ phương trình tạo bởi (P) và (d), khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (d) và (P).

Bài toán 4: Điểm và Parabol.**Phương pháp thực hiện**

Với Parabol (P) có phương trình:

$$(P): y^2 = 2px.$$

ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Lấy điểm $M(x_0, y_0) \in (P) \Rightarrow y_0^2 = 2px_0$.

Bước 2: Dựa vào điều kiện K có thêm được điều kiện cho x_0, y_0 .

Chú ý: Ta cần lưu ý các trường hợp sau:

1. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về bán kính qua tiêu điểm ta sử dụng công thức tính bán kính qua tiêu điểm theo toạ độ, điểm đó là:

$$MF = x_0 + \frac{p}{2}.$$

2. Nếu điểm phải tìm thoả mãn điều kiện về góc, ta đưa bài toán về xét hệ thức lượng trong tam giác.
3. Nếu điểm phải tìm là giao của Parabol với một đường khác, ta xét hệ phương trình tương giao để tìm toạ độ giao điểm.

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	1
-------------------	---

PHẦN I

40 ĐỀ THI KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG

A. ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

Đề số 1	5 – 43
Đề số 2	5 – 44

CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Đề số 3	6 – 45
Đề số 4	7 – 46

CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Đề số 5	8 – 48
Đề số 6	8 – 51

CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Đề số 7	9 – 53
Đề số 8	10 – 55
Đề số 9	11 – 57

CHƯƠNG V: THỐNG KÊ

Đề số 10	11 – 59
Đề số 11	12 – 61

CHƯƠNG VI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Đề số 12	12 – 62
Đề số 13	13 – 64

B. HÌNH HỌC

CHƯƠNG I: VECTO

Đề số 14	15 – 66
Đề số 15	15 – 67

CHƯƠNG II: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

Đề số 16	16 – 68
Đề số 17	17 – 70
Đề số 18	18 – 72

CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

Đề số 19	19 – 74
Đề số 20	20 – 77

C. 10 ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC KÌ I

Đề số 21	21 – 81
Đề số 22	22 – 82
Đề số 23	23 – 84
Đề số 24	24 – 86
Đề số 25	25 – 88
Đề số 26	26 – 90
Đề số 27	27 – 91
Đề số 28	28 – 93
Đề số 29	29 – 96
Đề số 30	30 – 99

D. 10 ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC KÌ II

Đề số 31	32 – 101
Đề số 32	32 – 103
Đề số 33	33 – 107
Đề số 34	34 – 110
Đề số 35	35 – 112
Đề số 36	36 – 115
Đề số 37	37 – 117
Đề số 38	39 – 120
Đề số 39	40 – 122
Đề số 40	41 – 126
PHỤ LỤC	131

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 9724770. Fax: (04) 9714899

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: **PHÙNG QUỐC BẢO**

Tổng biên tập: **NGUYỄN BÁ THÀNH**

Biên tập: **MINH HẢI**

Sửa bài: **VŨ NAM**

Trình bày bìa: **NGỌC ANH**

40 ĐỀ KIỂM TRA TRẮC NGHIỆM TOÁN 10

Mã số: 1L - 90ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Bao Bì Phong Tân - TP. Hồ Chí Minh.

Số xuất bản: 317 - 2007/CXB/08 – 54/ĐHQGHN, ngày 27/4/2007.

Quyết định xuất bản số: 196 LK/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2007.